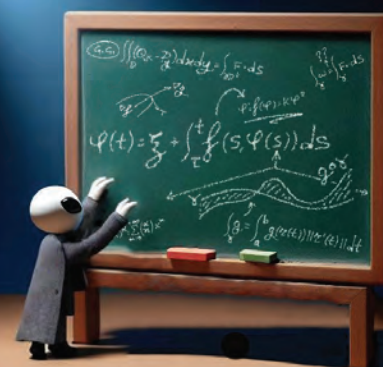


Andrea Donati Ivan Frittelli  
Michele Castello Alessandro Martina

# INTEGRALI RAVVICINATI DEL TERZO TIPO





# INTRODUZIONE E RINGRAZIAMENTI

---

*“Se mi sento infelice, faccio matematica per diventare felice. Se sono felice, faccio matematica per rimanere felice.”*

*PAUL TURÁN, illudendosi che i matematici possano essere felici.*

**Q**UESTO MANUALOZZO™ rappresenta la fine (più o meno) di un progetto durato quasi un anno e qualche mese. Durante l’ottobre del 2022 abbiamo iniziato a pubblicare “a puntate” gli appunti del corso di *Analisi Matematica 2*, man mano che seguivamo le lezioni. È stata un’avventura bellissima, un’occasione per riflettere sulle lezioni, imparare a “lateccare” e fare nuove conoscenze: tantissimi\* ci hanno scritto per aiutarci e segnalarci errori. Non possiamo quindi cominciare senza ringraziare, in ordine di apparizione:

- Massimo Bertolotti per averci ispirato a iniziare questo progetto;
- Alessandro Bifulco;
- Sabrina Brusco;
- Giulio Gaspari;
- Paolo Carpano-Maglioli;
- Cecilia Loiacono;
- Elisa Torazza;
- Gaia Berta;
- Edoardo Demichelis;
- Matteo Bisi;
- Nicolò Brunacci;
- Morena Chiavassa;
- Matteo Rocchetti;
- Giacomo Conca;
- Pietro Casta.

per il costante e preziosissimo aiuto.

Quelli che seguono sono gli appunti rivisitati<sup>1</sup> delle lezioni di *Analisi 2* dei professori *Marco Capiello*, *Susanna Terracini* e *Alessandro Iacopetti* tenute presso il dipartimento di matematica “G. Peano” dell’Università degli studi di Torino durante l’anno accademico 2022 – 2023. Sono presenti:

- **tutta la teoria vista** a lezione. Con †indichiamo argomenti o esercizi svolti durante le esercitazioni; con ‡indichiamo sottosezioni o approfondimenti di †;
- **alcuni esercizi tratti dalle prove d’esame**, nell’appendice.

Se vuoi segnalarci un errore, aiutarci o contattarci puoi farlo scrivendo ai seguenti indirizzi:

andrea.donati@edu.unito.it; ivan.frittelli@edu.unito.it;  
michele.castello@edu.unito.it; alessandro.martin321@edu.unito.it.

---

<sup>1</sup>*Ragionati*, in un certo senso, e speriamo vivamente non nell’altro.

Il Manualozzo™ non ha alcuna pretesa di completezza: per esercitarvi vi rimandiamo alle prove e alle esercitazioni passate, mentre per approfondire e rivedere gli argomenti trattati vi consigliamo di consultare [PS16], [Bar+13] o [AB97], tanto per citarne alcuni; per quanto riguarda le definizioni e le proprietà topologiche che di tanto in tanto utilizzeremo vi rimandiamo ai classici [Man14], [Kos80] o, per gli *aficionados* della serie Manualozzi™, [AB21].

Detto ciò, buona lettura!

**Una nota ragionata del redattore** I lettori assidui di questo testo si saranno accorti che da Manual\* è diventato a tutti gli effetti un Manualozzo™, il primo in cui non sono fra gli autori. Anche se non ho partecipato direttamente alla stesura dei capitoli, ho seguito con interesse il progetto dagli albori e ho collaborato nella revisione finale dell'opera: quello che ho visto è un lavoro di vera passione, e credo che classificarlo come un Manualozzo™ – un termine di qualità a cui tengo particolarmente – sia una mia approvazione più che totale di quanto fatto... e spero che anche tu, caro lettore, potrai apprezzare quest'opera come ho fatto io. *No, non sto piangendo... è che mi è entrata una bruschetta nell'occhio.*

– Massimo Bertolotti

II° Edizione, compilato il 18 luglio 2024.



This work is licensed under a [Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



# INDICE

---

INDICE [iii](#)

## I FUNZIONI A VALORI VETTORIALI, CURVE, CAMPI & FORME [I](#)

### 1 RIPASSO [3](#)

- 1.1 Limiti per funzioni a valori scalari [3](#)
- 1.2 Derivate e differenziali [4](#)
  - 1.2.1 Derivata direzionale e parziale [4](#)
  - 1.2.2 Differenziale [4](#)
  - 1.2.3 Formula di Taylor [6](#)
- 1.3 Integrali dipendenti da un parametro [6](#)

### 2 FUNZIONI A VALORI VETTORIALI [7](#)

- 2.1 Limiti [7](#)
- 2.2 Moti [9](#)
  - 2.2.1 Vettore derivata e retta tangente parametrizzata [9](#)
- 2.3 Applicazioni lineari [10](#)
- 2.4 Differenziabilità [11](#)
- 2.5 Differenziale della funzione composta [12](#)
- 2.6 Considerazioni sul teorema del valor medio [14](#)
- 2.7 Integrali [15](#)
- 2.8 † Operatori differenziali classici [16](#)

### 3 CURVE PARAMETRICHE [19](#)

- 3.1 Tipi di curve [20](#)
  - 3.1.1 Curve equivalenti [21](#)
- 3.2 Lunghezza di una curva [22](#)
  - 3.2.1 Esempio di curva non rettificabile [23](#)
- 3.3 Calcolo della lunghezza di una curva mediante l'uso di integrali [24](#)
- 3.4 Unione di 2 curve [26](#)
- 3.5 Proprietà della lunghezza delle curve [26](#)
- 3.6 Ascissa curvilinea [27](#)
- 3.8 Integrale curvilineo di prima specie [28](#)
  - 3.8.1 Interpretazione fisica dell'integrale curvilineo [29](#)

### 4 CAMPI VETTORIALI E 1-FORME [31](#)

4.1	Campi e 1-forme: definizioni	31
4.1.1	Corrispondenza tra campi vettoriali e forme differenziali	32
4.2	Integrale curvilineo di seconda specie	33
4.2.1	Interpretazione fisica: il lavoro	33
4.3	Campi conservativi e forme esatte	34
4.3.1	Integrale di un campo vettoriale conservativo	34
4.4	Campi irrotazionali e forme chiuse	36
4.4.1	Primitive della forma argomento su sottoinsiemi del dominio	40
4.4.2	Campi centrali	41
4.5	Teorema dell'energia cinetica	42
4.6	† Come trovare un potenziale	43
4.6.1	Metodo delle integrazioni parziali	43
4.6.2	Metodo delle poligonali	44
II SUCCESSIONI DI FUNZIONI 45		
5	SUCCESSIONI DI FUNZIONI	47
5.1	Convergenza in campo complesso	47
5.2	Successioni di funzioni	48
5.2.1	Convergenza di una successione di funzioni	48
5.2.2	Due metodi per mostrare la convergenza uniforme	50
5.2.3	Successioni di Cauchy di funzioni	51
5.2.4	Proprietà della convergenza uniforme	51
5.3	Serie di funzioni	56
5.3.1	Convergenza di una serie di funzioni	56
5.3.2	Teoremi di scambio per le serie	59
5.4	Serie di potenze	62
5.4.1	Raggio di convergenza	62
5.4.2	Convergenza uniforme	65
5.4.3	Serie di potenze reali	66
5.4.4	Serie derivata	67
5.4.5	Convergenza uniforme di serie di potenze complesse	69
5.4.6	Serie di Taylor e funzioni analitiche	69
5.5	† Esercizi svolti su serie complesse	73
III SPAZI METRICI 77		
6	SPAZI NORMATI E SPAZI METRICI	79
6.1	Spazi normati	79
6.2	Spazi di funzioni	81
6.3	Spazi metrici	82
6.3.1	Continuità e continuità uniforme	84
6.4.1	Alcuni teoremi sugli spazi metrici	85
6.4.2	Spazi metrici completi	86
6.4.3	Teorema delle contrazioni o di Banach-Caccioppoli	89
7	TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA	93
7.1	Teorema della funzione implicita (o di Dini)	96

7.2	Funzione implicita locale o globale?	98
7.3	Interpretazione geometrica del teorema di Dini	100
7.3.1	Iperpiano tangente	100
7.3.2	Superfici regolari n-dimensionali in $\mathbb{R}^p$	101
7.3.3	Superfici cartesiane	101
7.3.4	Scambio delle coordinate	102
7.4	Teorema d'inversione locale	103
8	OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA	105
8.1	Moltiplicatori di Lagrange	105
8.2	Condizioni necessarie per l'estremalità vincolata	108
8.2.1	Ottimizzazione di una forma quadratica vincolata a una sfera	110
8.3	Metodo dei moltiplicatori di Lagrange: applicazioni	110
8.3.1	Autovalori di matrici simmetriche	110
8.3.2	Differenza tra media aritmetica e geometrica	112
IV EQUAZIONI DIFFERENZIALI E INTEGRALI MULTIPLI 115		
9	EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE	117
9.1	Esempi di equazioni differenziali ordinarie	118
9.1.1	Dinamica classica	118
9.1.2	Esempio: Modello di Malthus	119
9.1.3	Equazioni a variabili separabili	120
9.1.4	Esempio: Esplosione in tempo finito	121
9.1.5	Esempio: Modello logistico	122
9.2	Equivalenza tra equazioni di ordine n e sistemi del primo ordine	124
9.2.1	Esempio: secondo principio della dinamica	125
9.3	Problemi di Cauchy	125
9.4	Esistenza e unicità della soluzione	125
9.4.1	Teorema di esistenza e unicità locale	127
9.4.2	Metodo di risoluzione iterativo	129
9.4.3	Pennello di Peano	131
9.4.4	Regolarità della soluzione	132
9.4.5	Prolungabilità della soluzione	134
9.6	Equazioni e sistemi di equazioni lineari	136
9.6.1	Principio di sovrapposizione	136
9.6.2	Integrale generale	137
9.7	† Teorema dell'asintoto	140
9.8	† Equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine	140
9.8.1	Equazioni differenziali ordinarie lineari omogenee	140
9.8.2	Equazioni differenziali ordinarie lineari non omogenee	140
9.9	† Equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine omogenee	141
9.10	† Equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine non omogenee	142
9.10.1	Metodo di variazione delle costanti arbitrarie	142
9.10.2	Metodo di somiglianza	144
9.11	† Oscillatore armonico	145
10	INTEGRALI MULTIPLI	147



10.1	Definizione dell'integrale doppio	147
10.2	Formule di riduzione	150
10.4	Teoria della misura	153
10.4.1	Regioni semplici	156
10.4.2	Insiemi semplicemente decomponibili	159
10.5	Densità	159
10.5.1	Baricentro e momento d'inerzia	160
10.6	Cambio di variabili	162
10.7	Integrali doppi impropri	164
10.7.1	Integrali di funzioni illimitate	164
10.7.2	Integrali su domini illimitati	166
10.8	Calcolo dell'area e integrale di superficie	167
10.9	Formula di Gauss-Green	168
10.9.1	Calcolo area con Gauss-Green	170
10.9.2	Teoremi di Stokes e della divergenza nel piano	171
10.10	Alcuni cenni di teoria degli integrali multipli generalizzati	173
10.11	† Integrazione per fili e per strati	174
10.12	‡ Solidi di rotazione	175
V	APPENDICE	177
A	APPENDICE	179
A.1	Esercizi su forme differenziali	179
A.2	Esercizi sull'applicazione del teorema di Dini	180
A.3	Esercizi su integrali doppi e tripli	181
A.4	Esercizi su equazioni differenziali ordinarie	182
	DEFINIZIONI E TEOREMI	189
	BIBLIOGRAFIA	195
	INDICE ANALITICO	197

# I

## FUNZIONI A VALORI VETTORIALI, CURVE, CAMPI & FORME



# RIPASSO

---

“Citazione, s. f.: L'atto di ripetere erroneamente le parole altrui.”

AMBROSE BIERCE, *ripetente*.

**I**N QUESTO capitolo rispolveriamo i concetti più importanti già visti in ANALISI MATEMATICA 1, concentrandoci sulle funzioni a valori scalari da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$  per prepararci allo studio delle funzioni a valori vettoriali.

## 1.1 LIMITI PER FUNZIONI A VALORI SCALARI

### DEFINIZIONE 1.1.1. (LIMITE PER FUNZIONI A VALORI SCALARI).

Data una funzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto f(\mathbf{x}),$$

un punto di accumulazione  $\mathbf{x}_0$  per  $A$  ed  $\ell \in \mathbb{R}$ , si dice che il **limite** di  $f$  per  $\mathbf{x}$  che tende a  $\mathbf{x}_0$  è uguale a  $\ell \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell,$$

se vale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon.$$

### DEFINIZIONE 1.1.2. (CONTINUITÀ PER FUNZIONI A VALORI SCALARI).

Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  e dato  $\mathbf{x}_0 \in A$ , si dice che  $f$  è **continua** in  $\mathbf{x}_0$  se

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0),$$

ossia se vale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \in A, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

In sostanza, il concetto di limite e di continuità per funzioni a valori scalari è lo stesso delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ .

## 1.2 DERIVATE E DIFFERENZIALI

### 1.2.1 Derivata direzionale e parziale

#### DEFINIZIONE 1.2.1. (DERIVATA DIREZIONALE).

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}_0$  nell'interno  $A^\circ$  di  $A$  e  $\mathbf{v}$  un versore di  $\mathbb{R}^n$ . Si definisce **derivata direzionale** di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  nella direzione  $\mathbf{v}$ , se esiste finita, la quantità

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

Se  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ , con  $\mathbf{e}_i$  un vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ , allora la derivata direzionale è detta **derivata parziale** e si denota con

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i}.$$

Intuitivamente, la derivata parziale indica la variazione della funzione al variare di una singola variabile.

### 1.2.2 Differenziale

#### DEFINIZIONE 1.2.2. (DIFFERENZIABILITÀ).

Si dice che  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  è **differenziabile** in  $\mathbf{x}_0 \in A^\circ$  se esiste un'applicazione lineare  $L_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  tale che valga

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) + r(\mathbf{h}), \quad (\text{I.I})$$

dove  $r(\mathbf{h})$  è tale che

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0},$$

ossia  $r(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|)$ .

#### DEFINIZIONE 1.2.3. (GRADIENTE).

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $\mathbf{x}_0 \in A^\circ$ . Allora si definisce **gradiente** di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  il vettore

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Per il *teorema fondamentale delle applicazioni lineari*, possiamo scrivere  $L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h})$  come il prodotto scalare  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle$ , per un opportuno  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . In *Analisi Matematica I* abbiamo dimostrato<sup>1</sup> che

<sup>1</sup>Per la dimostrazione vedere [PS15].

$\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$  e vale la **formula del gradiente**:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle.$$

Quindi, se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile, allora vale

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle + o(\|\mathbf{h}\|).$$

Questa formula ci permette di approssimare in maniera lineare un incremento di  $\mathbf{x}_0$ . Infatti, posto  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , possiamo scrivere:

$$f(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle}_{:=\pi(\mathbf{x})} + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$$

La funzione  $\pi(\mathbf{x})$  è detta **iperpiano tangente** al grafico di  $f$  nel punto  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ .

**OSSERVAZIONE.** Se  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , allora è continua in  $\mathbf{x}_0$ .

La differenziabilità implica la derivabilità direzionale in ogni direzione; il contrario non è vero. Vale infatti il seguente:

**TEOREMA 1.2.1. (DIFFERENZIALE TOTALE).**

Sia  $f$  una funzione che ammette tutte le derivate parziali continue in un intorno di  $\mathbf{x}_0$ . Allora  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ .  $\square$

- Se  $f$  ammette derivate parziali continue in ogni punto di un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, si dice che  $f \in \mathcal{C}^1(A)$ .
- Se le derivate parziali di  $f$  appartengono a  $\mathcal{C}^1(A)$ , allora si dice che  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ .
- Più in generale, si dice che  $f \in \mathcal{C}^k(A)$  se le sue derivate parziali di ordine  $k - 1$  appartengono a  $\mathcal{C}^1(A)$ .

**OSSERVAZIONE.** Se  $f \in \mathcal{C}^1(A)$ , allora  $f$  è differenziabile.

Se  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ , allora si dice che  $f$  è differenziabile due volte. Il differenziale secondo è

$$d_{\mathbf{x}_0}^2 f(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j = \langle H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle$$

con  $H_f(\mathbf{x}_0)$  la **matrice Hessiana** di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ :

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

## 1.2.3 Formula di Taylor

**PROPOSIZIONE 1.2.1. (RESTO DI PEANO).**

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  differenziabile  $k$  volte e  $\mathbf{x}_0 \in A^\circ$ . Allora per  $h \rightarrow 0$  vale

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}d_{\mathbf{x}_0}^2f(\mathbf{h}) + \dots + \frac{1}{k!}d_{\mathbf{x}_0}^kf(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|). \quad \square$$

**PROPOSIZIONE 1.2.2. (RESTO DI LAGRANGE).**

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  differenziabile  $k$  volte,  $\mathbf{x}_0 \in A^\circ$  e  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  tale che il segmento  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]$  sia interamente contenuto in  $A$ . Allora per un certo  $\xi \in [0, 1]$  vale

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) + \dots + \frac{1}{(k-1)!}d_{\mathbf{x}_0}^{k-1}f(\mathbf{h}) + \frac{1}{k!}d_{\mathbf{x}_0}^kf(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}). \quad \square$$

## 1.3 INTEGRALI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO

Sia  $f : C \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , una funzione che manda  $\mathbf{x} \in C$  e  $y \in [a, b]$  in  $f(\mathbf{x}, y)$ . Supponiamo che, fissato  $y \in [a, b]$ , la funzione  $f(y) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  sia integrabile secondo Riemann su  $[a, b]$ . Allora è ben definita la funzione

$$g(\mathbf{x}) = \int_a^b f(\mathbf{x}, y) dy \quad g : C \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

**PROPOSIZIONE 1.3.1. (CONTINUITÀ PER INTEGRALI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO).**

Se  $C$  è compatto e  $f$  è continua su  $C \times [a, b]$  allora la funzione  $g$  definita in (1.2) è continua su  $C$ .  $\square$

**TEOREMA 1.3.1. (DERIVAZIONE SOTTO IL SEGNO D'INTEGRALE).**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e supponiamo che  $f$  sia continua su  $A \times [a, b]$ . Fissato  $i \in \{1, \dots, n\}$ , supponiamo che la derivata  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  esista e sia continua su  $A \times [a, b]$ . Allora  $g$  è derivabile parzialmente rispetto a  $x_i$  su  $A$  e

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b f(\mathbf{x}, y) dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, y) dy. \quad \square$$

# FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

---

*“Ma nello stesso tempo notiamo, e per semplificare dimentichiamo subito quello che abbiamo appena notato.”*

DANIIL CHARMS, *Casi*.

**F**ORTI delle conoscenze sulle funzioni a valori scalari, in questo capitolo estenderemo i concetti di limite, continuità, differenziabilità e integrale alle funzioni a valori vettoriali.

## 2.1 LIMITI

### DEFINIZIONE 2.1.1. (FUNZIONE VALORI VETTORIALI).

Definiamo **funzione a valori vettoriali** una funzione

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

### DEFINIZIONE 2.1.2. (LIMITE).

Data una funzione  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , un punto di accumulazione  $\mathbf{x}_0$  per  $A$  e  $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^m$ , si dice che il **limite** di  $f$  per  $\mathbf{x}$  che tende a  $\mathbf{x}_0$  è uguale a  $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\ell},$$

se vale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\} \text{ con } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\ell}\| < \varepsilon.$$



Osserviamo che da un punto di vista topologico la definizione di limite per funzioni a valori vettoriali e scalari è la stessa; ciò che cambia è la *dimensione* degli intorno nel codominio.

**DEFINIZIONE 2.1.3. (CONTINUITÀ).**

Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  e dato  $\mathbf{x}_0 \in A$ , si dice che  $f$  è **continua** in  $\mathbf{x}_0$  se vale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \in A \text{ con } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon,$$

ossia  $f$  è continua se

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Diremo che  $f$  è continua in  $B \subseteq A$  se  $f$  è continua in ogni punto di  $B$ .

**PROPOSIZIONE 2.1.1. (CARATTERIZZAZIONE DEL LIMITE DI FUNZIONI VETTORIALI).**

Il limite per  $\mathbf{x}$  che tende a  $\mathbf{x}_0$  di una funzione a valori vettoriali è  $\ell$  se e solo se tutte le sue componenti  $f_j$  tendono a  $\ell_j$ :

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell \iff \forall j = 1, \dots, m \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_j(\mathbf{x}) = \ell_j.$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\implies$ ) Supponiamo che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell.$$

Allora

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - \ell\| < \varepsilon.$$

Per concludere osserviamo che

$$|f_j(\mathbf{x}) - \ell_j| \leq \|f(\mathbf{x}) - \ell\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (f_j(\mathbf{x}) - \ell_j)^2} < \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

essendo il primo termine uno dei termini della sommatoria.

$\impliedby$ ) Viceversa, supponiamo che per ogni  $j$  si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_j > 0 \text{ tale che } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_j \implies |f_j(\mathbf{x}) - \ell_j| < \varepsilon.$$

Scegliamo dunque  $\delta = \min_{j=1, \dots, m} \delta_j$ :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - \ell\| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m \max_{j=1, \dots, m} (f_j(\mathbf{x}) - \ell_j)^2} < \sqrt{m} \varepsilon. \quad \square$$

Il calcolo di limiti per funzioni a valori vettoriali si riduce, per quanto appena dimostrato, al calcolo di limiti di funzioni a valori scalari. Si ha inoltre il seguente:

**COROLLARIO 2.1.1. (CARATTERIZZAZIONE DELLA CONTINUITÀ PER FUNZIONI VETTORIALI).**

Una funzione è continua in un punto se e solo se tutte le sue componenti sono continue in quel punto.  $\square$

## 2.2 MOTI

Già nel corso di *Fisica I* abbiamo visto alcuni esempi di funzioni a valori vettoriali: i *moti*. Infatti, le loro parametrizzazioni

$$r : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_m(t) \end{pmatrix},$$

sono funzioni da un dominio unidimensionale, come  $\mathbb{R}$  o un intervallo, a uno multidimensionale, come  $\mathbb{R}^3$  nel caso dei moti fisici o più genericamente  $\mathbb{R}^m$ . La variabile indipendente  $t$  rappresenta spesso, ma non sempre, il tempo di percorrenza.

**ESEMPIO (MOTO RETTILINEO UNIFORME).**

Il *moto rettilineo uniforme* è parametrizzato da

$$r : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0)$$

con  $\mathbf{v}, \mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ .

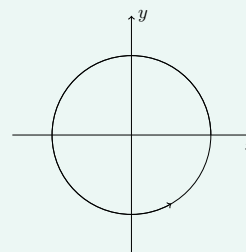
**ESEMPIO (MOTO CIRCOLARE UNIFORME).**

Il *moto circolare uniforme* è parametrizzato da

$$r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix}$$

con  $R > 0$ .

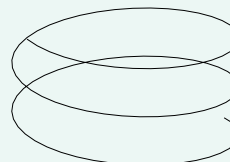
**ESEMPIO (MOTO ELICOIDALE).**

Il *moto circolare elicoidale* è parametrizzato da

$$r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$$

con  $R > 0$ .



## 2.2.1 Vettore derivata e retta tangente parametrizzata

Se è stato facile parlare di moti generalizzati, è altrettanto semplice generalizzare il concetto di velocità in più dimensioni. Sia  $r : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione a valori vettoriali e sia  $t_0 \in (a, b)$ ; se esiste, definiamo il **vettore derivata** o *velocità*  $r'(t_0)$  come

$$r'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}.$$

La **retta tangente** alla curva  $r(t)$  nel punto  $r(t_0)$ , ossia nell'istante  $t_0$ , è parametrizzata dalla funzione

$$s(t) = r(t_0) + (t - t_0)r'(t_0) \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

### 2.3 APPLICAZIONI LINEARI

Le applicazioni lineari sono un altro classico esempio di funzioni a valori vettoriali<sup>1</sup>.

#### DEFINIZIONE 2.3.1. (APPLICAZIONE LINEARE).

Si definisce **applicazione lineare** a valori reali una funzione  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  tale che:

1.  $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ;
2.  $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ;

oppure, in sintesi,

$$f(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Per il *Teorema fondamentale delle applicazioni lineari* è sufficiente assegnare le immagini dei vettori della base del dominio per identificare inequivocabilmente un'applicazione lineare. A ogni applicazione lineare è pertanto associata una matrice  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  che viene indicata anche con la notazione  $(a_{ij})$ :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij};$$

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Indichiamo l'insieme delle applicazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  con  $\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .

Si può definire inoltre la norma di un'applicazione lineare o, più in generale, di una funzione nel seguente modo:

#### DEFINIZIONE 2.3.2. (NORMA OPERATORIALE).

Definiamo **norma operatoriale** la quantità

$$\|f\|_{\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|f(\mathbf{x})\|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

#### PROPRIETÀ (DELLE APPLICAZIONI LINEARI).

1. Data  $f$  applicazione lineare,  $\|f\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2}$ ;
2. Ogni applicazione lineare è continua:  $\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .

#### DIMOSTRAZIONE.

i Per ogni applicazione lineare  $f$  vale

$$(f(\mathbf{x}))_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \mathbf{y} = A\mathbf{x},$$

<sup>1</sup>La notazione  $f(\mathbf{x})$  qui adottata è coerente con quella usata nei precedenti corsi di Algebra lineare. È comune scrivere  $f\mathbf{x}$  omettendo le parentesi.

quindi

$$\|f(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Da (2.3) e considerando che il massimo valore di  $\|\mathbf{x}\|$  è 1 si ha

$$\|f(\mathbf{x})\|^2 \leq \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \left[ \|\mathbf{x}\|^2 \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right)^2 \right) \right] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

Per concludere si estrae la radice del primo e dell'ultimo termine.

- ii Siano  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  un'applicazione lineare generica. Se  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ , utilizzando la linearità di  $f$  si ha

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\|_{\mathbb{R}^m} &= \|f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\| \\ &= \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \frac{\|f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \\ &= \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \left\| f \left( \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \right) \right\| \\ &\leq \underbrace{\|f\|}_{\text{cost.}} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \end{aligned}$$

ossia  $f$  è Lipschitziana e quindi continua. □

## 2.4 DIFFERENZIABILITÀ

### DEFINIZIONE 2.4.I. (FUNZIONE DIFFERENZIABILE, DIFFERENZIALE).

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A$  aperto,  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Si dice che  $f$  è **differenziabile** in  $\mathbf{x}_0$  se esiste

$L_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) + r(\mathbf{h})$$

dove  $r(\mathbf{h})$  è tale che

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$$

La funzione  $L_{\mathbf{x}_0}$  è detta **differenziale** di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  e si denota con  $d_{\mathbf{x}_0}f$ . Equivalentemente,  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  se esiste  $M \in \mathbb{R}^{m,n}$  tale che

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + M\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|). \quad (2.4)$$

Tale matrice è detta la matrice associata all'applicazione lineare  $L_{\mathbf{x}_0}$ .

### PROPOSIZIONE 2.4.I. (CARATTERIZZAZIONE DIFF. DI FUNZIONI VETTORIALI).

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A$  aperto.  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  se e solo se tutte le sue componenti  $f_1, \dots, f_m$  sono differenziabili in  $\mathbf{x}_0$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

$$\begin{aligned}
f \text{ è diff. in } \mathbf{x}_0 &\iff \exists M \in \mathbb{R}^{m,n} \text{ che soddisfi (2.4)} \\
&\iff f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f_i(\mathbf{x}_0) + (m_{i1}h_1 + \dots + m_{in}h_n) + r_i(\mathbf{h}) \\
&\iff f_i \text{ è differenziabile in } \mathbf{x}_0, \forall i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

□

Da questa proposizione segue che

$$M_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$

e dunque

$$M = J_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

La matrice  $J_f(\mathbf{x}_0)$  associata all'applicazione lineare **differenziale**  $df(\mathbf{x}_0)$  rispetto alle basi canoniche si dice **jacobiana<sup>2</sup> di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$** , in onore del matematico tedesco Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851); applicandola al vettore incremento  $\mathbf{h}$  in  $\mathbb{R}^n$  otteniamo il vettore  $J_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$  in  $\mathbb{R}^m$ :

$$\begin{aligned}
d_{\mathbf{x}_0}f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
\mathbf{h} &\longmapsto J_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}.
\end{aligned}$$

**ESEMPIO.** Sia

$$\begin{aligned}
f : A \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 e^{x_1} \\ x_1 + x_2 \\ x_1 x_2^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La matrice jacobiana si ottiene calcolando il gradiente di ogni componente, riga per riga:

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 e^{x_1} & e^{x_1} \\ 1 & 1 \\ x_2^2 & 2x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

**2.5 DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE COMPOSTA****TEOREMA 2.5.I. (REGOLA DELLA CATENA).**

Siano  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ , con  $A$  e  $B$  aperti. Siano inoltre  $\mathbf{x}_0 \in A$  e  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in B$ . Siano infine  $f$  differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e  $g$  differenziabile in  $\mathbf{y}_0$ . Allora la funzione  $g \circ f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e

$$d_{\mathbf{x}_0}(g \circ f) = d_{\mathbf{y}_0}(g) \circ d_{\mathbf{x}_0}(f).$$

Equivalentemente,

$$J_{g \circ f}(\mathbf{x}_0) = J_g(\mathbf{y}_0) J_f(\mathbf{x}_0).$$

<sup>2</sup>Si può leggere sia *giacobiana*, sia *iacobiana*.

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla definizione sappiamo che

$$\begin{aligned} f \text{ differenziabile in } \mathbf{x}_0 &\iff f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + d_{\mathbf{x}_0}f\mathbf{h} + o_f(\|\mathbf{h}\|); \\ g \text{ differenziabile in } \mathbf{y}_0 &\iff g(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) = g(\mathbf{y}_0) + d_{\mathbf{y}_0}g\mathbf{k} + o_g(\|\mathbf{k}\|). \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{k}$  sono tali che

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{o_f(\|\mathbf{h}\|)}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{o_g(\|\mathbf{k}\|)}{\|\mathbf{k}\|} = \mathbf{0}.$$

Consideriamo ora la composizione

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= g(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})) \\ &= g(f(\mathbf{x}_0) + d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) + o_f(\mathbf{h})) \quad (\equiv) \quad (\text{diff. di } f) \end{aligned}$$

Osserviamo che  $\mathbf{k} = d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) + o_f(\mathbf{h})$  è un incremento perché lo è  $\mathbf{h}$ : se  $\mathbf{h}$  tende a  $\mathbf{0}$  allora anche  $\mathbf{k}$  tende a  $\mathbf{0}$ . Infatti, per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\|\mathbf{k}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h})\|_{\mathbb{R}^n} + \|o_f(\mathbf{h})\|_{\mathbb{R}^n}$$

e se  $\mathbf{h}$  tende a  $\mathbf{0}$  allora  $o_f(\mathbf{h})$  per definizione,  $d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h})$  ( $d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) \leq \|d_{\mathbf{x}_0}f\| \|\mathbf{h}\|$ ) e  $\mathbf{k}$  per la disuguaglianza precedente tendono tutti a  $\mathbf{0}$ . Dunque, possiamo usare il fatto che  $g$  sia differenziabile in  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ :

$$\begin{aligned} (\equiv) &g(\mathbf{y}_0) + d_{\mathbf{y}_0}g(d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) + o_f(\mathbf{h})) + o_g(d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) + o_f(\mathbf{h})) \\ &= g(\mathbf{y}_0) + d_{\mathbf{y}_0}g \circ d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) + \underbrace{d_{\mathbf{y}_0}g \circ o_f(\mathbf{h})}_{:=r_1(\mathbf{h})} + \underbrace{o_g(d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) + o_f(\mathbf{h}))}_{:=r_2(\mathbf{h})} \\ &= g(\mathbf{y}_0) + d_{\mathbf{y}_0}g \circ d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) + r_1(\mathbf{h}) + r_2(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Se dimostriamo che  $r_1(\mathbf{h}) + r_2(\mathbf{h})$  è  $o(\|\mathbf{h}\|)$  abbiamo finito. Per prima cosa, dimostriamo che  $r_1(\mathbf{h})$  è  $o(\|\mathbf{h}\|)$ :

$$\frac{r_1(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{d_{\mathbf{y}_0}g \circ o_f(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \leq \underbrace{\|d_{\mathbf{y}_0}g\|_{\ell(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)}}_{\text{costante}} \underbrace{\frac{\|o_f(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|}}_{\text{tende a } 0} \rightarrow 0.$$

Dimostriamo che  $r_2(\mathbf{h})$  è  $o(\|\mathbf{h}\|)$ :

$$\frac{r_2(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\|o_g(\overbrace{d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) + o_f(\mathbf{h})}^{\text{incremento } \mathbf{k}})\|}{\|\mathbf{k}\|} \frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|};$$

la prima frazione è  $o(\|\mathbf{h}\|)$  per definizione di differenziale e di  $o$  piccolo, quindi se la seconda frazione è limitata possiamo concludere:

$$\frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\|d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h}) + o_f(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \frac{\|d_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{\|o_f(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \underbrace{\|d_{\mathbf{x}_0}f\|}_{\text{limitato}} \frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{\|o_f(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \rightarrow 0 \text{ per def.} \quad \square$$

## 2.6 CONSIDERAZIONI SUL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

**TEOREMA 2.6.I. (TEOREMA DEL VALOR MEDIO GENERALIZZATO).**

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $f \in \mathcal{C}^1(A)$  e siano  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$  tali che il segmento  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  sia contenuto in  $A$ . Allora esiste  $\xi \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  tale che

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\xi), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle. \quad (2.5)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia

$$\begin{aligned} r : [0, 1] &\longrightarrow A \\ t &\longmapsto t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a} \end{aligned}$$

e consideriamo  $g(t) = f \circ r(t)$ . Osserviamo che  $r \in \mathcal{C}^1((0, 1))$  implica  $f \circ r \in \mathcal{C}^0((0, 1))$  e  $f \circ r \in \mathcal{C}([0, 1])$ . Per il teorema di Lagrange esiste  $\bar{t} \in [0, 1]$  tale che:

1.  $g(1) - g(0) = g'(\bar{t})$ ;
2.  $g(1) = f(r(1)) = f(\mathbf{b})$ ;
3.  $g(0) = f(r(0)) = f(\mathbf{a})$ .

Usando la regola della catena abbiamo la tesi

$$g'(\bar{t}) = J_f(r(\bar{t}))J_r(\bar{t}) = \nabla f(\underbrace{r(\bar{t})}_{\xi})r'(\bar{t}) = \left\langle \nabla f(\xi), r'(\bar{t}) \right\rangle = \langle \nabla f(\xi), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle. \quad \square$$

Ci domandiamo ora se il teorema del valor medio valga anche per funzioni a valori vettoriali. La risposta è **no**, come illustra il seguente:

**ESEMPIO.** Consideriamo

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vale (2.5)? Dovrebbe esistere  $\bar{t}$  tale che valga

$$f(2\pi) - f(0) = J_f(\bar{t})(2\pi - 0) \quad \bar{t} \in [0, 2\pi];$$

$$f(2\pi) - f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad J_f(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\bar{t}) \\ \cos(\bar{t}) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0, 2\pi];$$

Un  $\xi$  tale da soddisfare (2.5) esiste per ogni componente, ma in generale componenti diverse hanno  $\xi$  diverso.

Vale però il seguente:

**TEOREMA 2.6.2. (MAGGIORAZIONE DI LAGRANGE DEBOLE).**

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A$  aperto,  $f \in \mathcal{C}^1(A)$ . Siano  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$  tali che il segmento  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  sia contenuto in  $A$ . Allora:

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\|_{\mathbb{R}^m} \leq \alpha \sqrt{m} \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^n} \quad (2.6)$$

con  $\alpha = \max_{j=1, \dots, m} \max_{\xi \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \|\nabla f_j(\xi)\|_{\mathbb{R}^n}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo

$$f_j(\mathbf{b}) - f_j(\mathbf{a}) = \langle \nabla f_j(\xi), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle \leq \|\nabla f_j(\xi)\| \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|,$$

dove la maggiorazione è dovuta alla *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*. Si ha che

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\|_{\mathbb{R}^m} &= \sqrt{\sum_{j=1}^m |f_j(\mathbf{b}) - f_j(\mathbf{a})|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^m \|\nabla f_j(\xi)\|^2 \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2} \\ &\leq \alpha \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \sqrt{\sum_{j=1}^m 1} \\ &= \alpha \sqrt{m} \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|, \end{aligned}$$

ovvero la tesi.  $\square$

## 2.7 INTEGRALI

**DEFINIZIONE 2.7.I. (FUNZIONE INTEGRABILE, INTEGRALE DI FUNZIONI VETTORIALE).**

Una funzione  $\xi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$  si dice **integrabile** (in senso proprio) su  $[a, b]$  se lo sono tutte le sue componenti  $\xi_1, \dots, \xi_m$ ; in tal caso, l'integrale su  $[a, b]$  si definisce come il vettore

$$\int_a^b \xi(t) dt = \begin{pmatrix} \int_a^b \xi_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b \xi_m(t) dt \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Questo integrale gode delle proprietà di linearità e additività:

**PROPRIETÀ 2.7.I. (DELL'INTEGRALE DI FUNZIONI VETTORIALE).**

Sia  $\xi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$  integrabile in senso proprio. Allora:

1. Se  $\xi \in \mathcal{C}([a, b])$ , allora

$$\int_a^b \xi'(t) dt = \xi(b) - \xi(a);$$

2. Se  $c \in \mathbb{R}^m$ , allora

$$\left\langle c, \int_a^b \xi(t) dt \right\rangle = \int_a^b \langle c, \xi(t) \rangle dt;$$

3.  $\|\xi\|$  è integrabile e vale

$$\left\| \int_a^b \xi(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\xi(t)\| dt.$$

**DIMOSTRAZIONE.**

i È conseguenza del Teorema fondamentale del calcolo integrale, applicato componente per componente.



ii Si ha

$$\left\langle c, \int_a^b \xi(t) dt \right\rangle = \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b \xi_j(t) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^m c_j \xi_j(t) dt = \int_a^b \langle c, \xi(t) \rangle dt.$$

iii Applichiamo<sup>a</sup> 2) con  $c = \int_a^b \xi(t) dt$ :

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b \xi(t) dt \right\|^2 &= \int_a^b \left\langle \int_a^b \xi(s) ds, \xi(t) \right\rangle dt \\ &\leq \int_a^b \left\| \int_a^b \xi(s) ds \right\| \|\xi(t)\| dt \quad (\text{disuguaglianza di Cauchy-Schwarz}) \\ &= \left\| \int_a^b \xi(s) ds \right\| \int_a^b \|\xi(t)\| dt \quad \left\| \int_a^b \xi(s) ds \right\| \text{ è una costante.} \end{aligned}$$

utilizzando nell'ordine la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e il fatto che. Abbiamo così dimostrato che

$$\left\| \int_a^b \xi(t) dt \right\|^2 \leq \left\| \int_a^b \xi(s) ds \right\| \int_a^b \|\xi(t)\| dt$$

e dividendo entrambi i membri per la norma dell'integrale abbiamo la tesi.  $\square$

<sup>a</sup>Il cambio di variabile del primo passaggio serve solo a seguire meglio la dimostrazione; del resto la variabile d'integrazione è muta.

## 2.8 † OPERATORI DIFFERENZIALI CLASSICI

### DEFINIZIONE 2.8.1. (CAMPO VETTORIALE).

Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione  $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$  continua su  $A$  si dice **campo vettoriale**.

### DEFINIZIONE 2.8.2. (GRADIENTE).

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  una funzione *scalare* con  $f \in C^1(A)$ . Definiamo **gradiente** di  $f$  il campo vettoriale

$$\begin{aligned} \nabla f : A &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si ha  $\nabla f \in C(A)$ .

### DEFINIZIONE 2.8.3. (DIVERGENZA).

Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione *vettoriale* con  $F \in C^1(A)$ . Definiamo **divergenza** di

*F* la funzione scalare

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \operatorname{div} F(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Si ha  $\operatorname{div} f \in \mathcal{C}(A)$ .

**DEFINIZIONE 2.8.4. (ROTORE).**

Sia  $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione vettoriale con  $F \in \mathcal{C}^1(A)$ . Definiamo **rotore** di  $F$  il campo vettoriale

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F : A &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} (x, y, z). \end{aligned}$$

Si ha  $\operatorname{rot} f \in \mathcal{C}(A)$ .

**DEFINIZIONE 2.8.5. (LAPLACIANO).**

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  una funzione scalare con  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ . Definiamo **laplaciano** di  $f$  la funzione scalare

$$\begin{aligned} \Delta f : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \Delta f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Si ha  $\Delta f \in \mathcal{C}(A)$ .

**OSSERVAZIONI.**

- $\operatorname{div} F$  è uguale alla traccia della matrice jacobiana.
- Per scrivere  $\operatorname{rot} F$  può utilizzare la seguente regola mnemonica formale:

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$



# CURVE PARAMETRICHE

“Una figura con molte curve offre sempre molti angoli interessanti.”

WESLEY RUGGLES, *appassionato di curve rettificabili.*

**D**EFINIRE una curva parametrica non è banale. In questa sede daremo una definizione di *curva parametrica* molto ampia, senza preoccuparci troppo dei casi “patologici” come la *curva di Peano*: ci concentreremo sulle curve regolari, che costituiscono uno dei primi esempi di varietà (1-dimensionali)<sup>1</sup> che l’aspirante matematico incontra nel suo percorso di studi. Parleremo poi di *lunghezza di una curva* e di alcune proprietà delle curve parametriche, in vista di uno studio più approfondito durante il corso di *Geometria 3*.

**DEFINIZIONE 3.0.1. (CURVA PARAMETRICA).**

Si dice **curva parametrica** o parametrizzata di  $\mathbb{R}^m$  una coppia  $(\gamma, r)$ , con

$$\begin{aligned} r : I &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_m(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo e  $r$  è una funzione continua tale che  $\gamma = r(I)$ . Chiamiamo  $\gamma$  il **sostegno della curva** e  $r$  la **parametrizzazione della curva**.

**NOTAZIONE.** Se  $m = 2$  o  $3$  è comune la notazione con  $x, y$  e  $z$ :

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}; \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

<sup>1</sup> $X \subseteq \mathbb{R}^m$  si dice **varietà  $n$ -dimensionale** se ogni suo punto ammette un intorno diffeomorfo a un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \leq m$ .

**ESEMPIO.** Consideriamo  $(r_1, \gamma)$  e  $(r_2, \gamma)$  con

$$\begin{aligned} r_1 : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & r_2 : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} & t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si osserva che le due curve hanno lo stesso sostegno  $\gamma = S^1$ , ma le descrizioni del moto del punto mobile lungo il supporto date dalle parametrizzazioni sono differenti! Infatti:

- con la prima parametrizzazione, il punto materiale compie *un* giro completo della circonferenza  $S^1$ ;
- con la seconda parametrizzazione, il punto materiale compie *due* giri completi della circonferenza  $S^1$ .

Come vedremo nei paragrafi successivi, un'ulteriore differenza tra le due è che la *lunghezza* della seconda curva è pari a due volte la prima.

**OSSERVAZIONE.** In generale, una circonferenza è parametrizzata da

$$\begin{aligned} r_\omega : \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE.** Fissato un sostegno, si fissa anche un *verso di percorrenza* della curva.

**ESEMPIO.** Gli esempi precedenti parametrizzano tutti una circonferenza percorsa in senso antiorario. Se vogliamo una parametrizzazione che percorre la circonferenza in senso orario, possiamo considerare

$$\begin{aligned} r_- : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi - t) \\ \sin(2\pi - t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

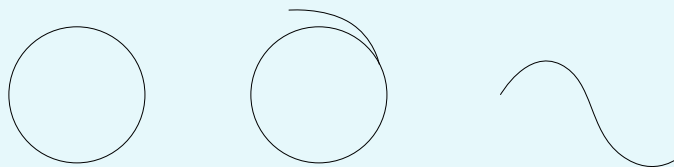
### 3.1 TIPI DI CURVE

**DEFINIZIONE 3.1.1. (TIPI DI CURVE).**

Una curva  $(\gamma, r)$  di parametrizzazione  $r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$  si dice:

- **chiusa** se  $r(a) = r(b)$ ;
- **semplice** se la restrizione di  $r$  su  $[a, b)$  e<sup>a</sup>  $(a, b]$  è iniettiva. Da un punto di vista cinematico questo garantisce che il punto mobile non attraversi due volte lo stesso punto del piano;
- **curva piana** se ha il sostegno in  $\mathbb{R}^2$ ;
- **curva cartesiana** se è del tipo  $r(t) = (t, f(t))^T$  con  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^{m-1}$  continua e ha per sostegno il grafico di  $f(t)$ ;
- **regolare** se  $r \in \mathcal{C}^1(I)$  e  $r'(t) \neq 0_{\mathbb{R}^m}$  per ogni  $t \in I$ ;
- **di classe  $\mathcal{C}^k$**  se  $r \in \mathcal{C}^k([a, b])$ .

Una curva chiusa, semplice e piana si dice **curva di Jordan**.



“Alcuni testi riportano “o” al posto di “e”, ma con la prima scelta si può considerare semplice anche la seconda curva.

Abbiamo definito la retta di equazione (2.1) retta tangente parametrizzata. Se la curva è regolare la retta tangente parametrizzata è una funzione lineare non costante. Infatti, se viene meno l'ipotesi di regolarità può esistere  $\bar{t} \in I$  tale che  $r'(\bar{t}) = 0$  e si ha in  $\bar{t}$ :

$$s(t) = r(t_0) + (t - t_0)r'(t_0) \implies s(\bar{t}) = r(t_0).$$

Se  $f \in C^1$  le curve cartesiane sono sempre regolari e semplici si ha

$$r(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \implies r'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se una componente è iniettiva, la curva è semplice perché se  $t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2$  si ha

$$r(t_1) = \begin{pmatrix} r_1(t_1) \\ r_2(t_1) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} r_1(t_2) \\ r_2(t_2) \end{pmatrix} = r(t_2).$$

### 3.1.1 Curve equivalenti

Sia  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $r \in C^1(I)$  e sia  $\varphi : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I$  una funzione biettiva con  $J$  intervallo tale che  $\varphi \in C^1(J)$  e  $\varphi'(\tau) \neq 0$  per ogni  $\tau \in J$ . Se considero la funzione  $\tilde{r} = r \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^m$  si osserva che  $\tilde{r}$  parametrizza una curva  $(\gamma, \tilde{r})$  che ha lo stesso sostegno di  $(\gamma, r)$ : infatti,

$$\tilde{r}(J) = r(\varphi(J)) = r(I).$$

#### DEFINIZIONE 3.1.2. (CURVE EQUIVALENTI).

Date  $\gamma, r$  e  $\tilde{r}$  come sopra, se  $(\gamma, \tilde{r})$  e  $(\gamma, r)$  sono curve semplici si dicono **equivalenti**, indipendentemente dal verso di percorrenza. La funzione  $\varphi$  è detta **cambiamento di parametro**.

#### OSSERVAZIONE.

1. Se  $\varphi : J \rightarrow I \in C^1(J)$  e biettiva, con  $\varphi'(\tau) \neq 0$  per ogni  $\tau \in J$ , allora  $\varphi'(\tau) > 0 \forall \tau \in J$  oppure  $\varphi'(\tau) < 0$  per ogni  $\tau \in J$  per il *teorema di esistenza degli zeri*, quindi  $\varphi$  è strettamente crescente o strettamente decrescente su  $J$ .
2. Le curve equivalenti della definizione 3.1.2 si dicono tali perché la relazione tra le due curve descritta è di equivalenza, ossia riflessiva, simmetrica e transitiva.
3. Se una curva  $(\gamma, r)$  è regolare e  $\varphi : J \rightarrow I$  è un cambio di parametrizzazione allora  $(\gamma, \tilde{r})$ , con  $\tilde{r} = r \circ \varphi$ , è regolare. Infatti, per la regola della catena:

$$\tilde{r}'(\tau) = \underbrace{r'(\varphi(\tau))}_{\neq 0 \text{ r regolare}} \underbrace{\varphi'(\tau)}_{\neq 0 \text{ def } \varphi}.$$

4. Data una curva, posso sempre ottenere una parametrizzazione che ne cambi il verso di percorrenza. Consideriamo  $r : [a, b] = I \longrightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\gamma = r(I)$ : allora

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow I \\ t &\longmapsto a + b - t \end{aligned}$$

è un cambiamento di parametro tale che  $\tilde{r} = r \circ \varphi(\tau) = r(a + b - t)$ ,  $t \in [a, b]$ . La curva  $(\gamma, \tilde{r})$  si dice **curva opposta** di  $(\gamma, r)$  e spesso si indica con  $-\gamma$ .

### 3.2 LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Sia  $r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$  continua e  $(\gamma, r)$  una curva; scegliamo una partizione (o suddivisione)  $\mathcal{D}_n$  di  $[a, b]$ :

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

Siano  $P_j = r(t_j)$  per  $j = 0, \dots, n$ . La lunghezza del segmento di estremi  $P_j$  e  $P_{j+1}$  è

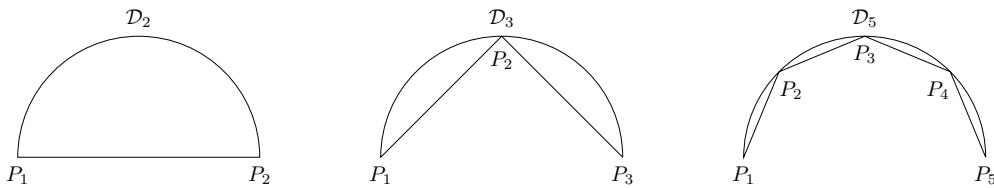
$$\ell(\overline{P_j P_{j+1}}) = \|r(t_{j+1}) - r(t_j)\|_{\mathbb{R}^m}.$$

Considerando tutta la partizione  $\mathcal{D}$  otteniamo una spezzata  $\Gamma_{\mathcal{D}}$  - dipendente dalla partizione scelta - di lunghezza

$$\ell(\Gamma_{\mathcal{D}}) = \sum_{j=0}^{n-1} \|r(t_{j+1}) - r(t_j)\|.$$

Con l'aumentare dei punti di una partizione si osserva che:

- più punti ha una partizione, meglio la spezzata a essa associata approssima la curva;
- date due partizioni  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$ , se  $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{D}_1$  ( $\mathcal{D}_2$  è meno fine di  $\mathcal{D}_1$ ), allora  $\ell(\Gamma_{\mathcal{D}_2}) \leq \ell(\Gamma_{\mathcal{D}_1})$ .



È pertanto naturale la seguente:

#### DEFINIZIONE 3.2.1. (LUNGHEZZA).

Definiamo la **lunghezza**  $\ell(\gamma, r)$  di  $(\gamma, r)$  come

$$\ell(\gamma, r) := \sup_{\mathcal{D}} \ell(\Gamma_{\mathcal{D}}). \quad (3.1)$$

Una curva si dice **rettificabile** se ha lunghezza finita  $\ell(\gamma, r) < +\infty$ .

**OSSERVAZIONE.** In generale si ha  $\ell(\gamma, r) \in [0, +\infty]$ , dove  $\ell(\gamma, r) = 0$  se e solo se  $\gamma$  è un solo punto.

## 3.2.1 Esempio di curva non rettificabile

**ESEMPIO (UNA CURVA non RETTIFICABILE).**

Sia  $r : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definita nel seguente modo:

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad x(t) = t, \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ t \sin\left(\frac{\pi}{2t}\right) & \text{se } t \in (0, 1] \end{cases}.$$

Per dimostrare che  $\ell(\gamma, r)$  non è finita scegliamo la seguente successione di partizioni:

$$\mathcal{D}_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, 1\right\} \quad \mathcal{D}_2 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1\right\} \quad \mathcal{D}_n = \left\{0, \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}, \dots, 1\right\}.$$

Si osserva che

$$\sin\left(\frac{\pi}{2\frac{1}{2j-1}}\right) = \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{2}\right) = (-1)^{j+1} \forall j.$$

Quindi

$$P_j = r\left(\frac{1}{2j-1}\right) = \left(\frac{1}{2j-1}, (-1)^{j+1} \frac{1}{2j-1}\right).$$

Calcoliamo la distanza del segmento tra due punti successivi:

$$\begin{aligned} \|P_{j+1} - P_j\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2j-1}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^{j+2}}{2j+1} - \frac{(-1)^{j+1}}{2j-1}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{\left(\frac{(-1)^{j+2}}{2j+1} - \frac{(-1)^{j+1}}{2j-1}\right)^2} \end{aligned}$$

Poiché  $j+1$  e  $j+2$  sono due numeri naturali consecutivi, se  $j+2$  è dispari  $j+1$  è pari ed entrambe le frazioni sono negative; viceversa, se  $j+2$  è pari le frazioni saranno entrambe positive. Ciò nonostante, l'elevamento al quadrato di questa differenza di frazioni garantisce che il risultato sia positivo in entrambi i casi. Quindi, senza perdita di generalità, possiamo procedere supponendo entrambe le frazioni positive.

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{(-1)^{j+2}}{2j+1} - \frac{(-1)^{j+1}}{2j-1}\right)^2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j-1}\right)^2} = \frac{2j-1+2j+1}{4j^2-1} = \frac{4j}{4j^2-1} \\ &\geq \frac{4j}{4j^2} = \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\ell(\Gamma_{\mathcal{D}_n}) = \sum_{j=1}^{n-1} \|P_{j+1} - P_j\| \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j},$$

da cui

$$\ell(\gamma, r) = \sup_{\mathcal{D}_n} \ell(\Gamma_{\mathcal{D}_n}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$



### 3.3 CALCOLO DELLA LUNGHEZZA DI UNA CURVA MEDIANTE L'USO DI INTEGRALI

È fondamentale il seguente:

**TEOREMA 3.3.1. (CALCOLO DELLA LUNGHEZZA DI UNA CURVA).**

Sia  $(\gamma, r)$  una curva di classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ . Allora:

- 1) La curva è rettificabile:  $\ell(\gamma, r) < +\infty$ ;
- 2)  $\ell(\gamma, r) = \int_a^b \|r'(t)\| dt$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

i Sia  $\mathcal{D}$  una partizione di  $[a, b]$ . Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale segue che

$$r(t_{j+1}) - r(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} r'(t) dt.$$

Applicando la norma a entrambi i membri:

$$\|r(t_{j+1}) - r(t_j)\| = \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} r'(t) dt \right\| \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|r'(t)\| dt \quad \forall j = 0, \dots, n-1$$

Considerando la somma di tutti i segmenti,

$$\ell(\Gamma_{\mathcal{D}}) = \sum_{j=0}^{n-1} \|r(t_{j+1}) - r(t_j)\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|r'(t)\| dt = \int_a^b \|r'(t)\| dt.$$

Per ogni  $\mathcal{D}$  si ha

$$\ell(\Gamma_{\mathcal{D}}) \leq \int_a^b \|r'(t)\| dt \implies \ell(\gamma, r) = \sup_{\mathcal{D}} \ell(\Gamma_{\mathcal{D}}) \leq \int_a^b \|r'(t)\| dt.$$

Essendo  $r'$  continua per ipotesi e la norma anch'essa continua,  $\|r'(t)\|$  è uniformemente continua su  $[a, b]$  e pertanto integrabile in senso proprio.

ii Per concludere è sufficiente dimostrare

$$\ell(\gamma, r) \geq \int_a^b \|r'(t)\| dt,$$

visto che abbiamo appena dimostrato la disuguaglianza nel verso opposto. Poiché  $r \in \mathcal{C}^1([a, b])$ ,  $r'$  è uniformemente continua su  $[a, b]$ , quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall t, s \in [a, b] \ |t - s| < \delta \implies \|r'(t) - r'(s)\| < \varepsilon.$$

Fissiamo allora  $\varepsilon$  e scegliamo una partizione  $\mathcal{D}_\varepsilon$  di  $[a, b]$  di ampiezza minore di  $\delta$ . Sia  $t \in [t_j, t_{j+1}]$  per un  $j$  fissato: allora  $\|r'(t_{j+1}) - r'(t_j)\| < \varepsilon$ . Si ha:

$$\|r'(t)\| = \|r'(t) - r'(t_j) + r'(t_j)\| \leq \|r'(t) - r'(t_j)\| + \|r'(t_j)\| < \varepsilon + \|r'(t_j)\|.$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|r'(t)\| dt &\leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|r'(t_j)\| dt \\ &= (t_{j+1} - t_j)\varepsilon + \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} r'(t_j) dt \right\| \quad (\ominus) \end{aligned}$$

Il passaggio  $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|r'(t_j)\| dt = \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} r'(t_j) dt \right\|$  è lecito perché  $r'(t_j)$  è costante per  $j$  fissato. Proseguendo,

$$\begin{aligned} (\ominus) &(t_{j+1} - t_j)\varepsilon + \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} r'(t_j) - r'(t) + r'(t) dt \right\| \\ &\leq (t_{j+1} - t_j)\varepsilon + \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} r'(t_j) - r'(t) dt \right\| + \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} r'(t) dt \right\| \\ &\leq (t_{j+1} - t_j)\varepsilon + \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} r'(t_j) - r'(t) dt \right\| + \|r(t_{j+1}) - r(t_j)\| \\ &\leq 2\varepsilon(t_{j+1} - t_j) + \|r(t_{j+1}) - r(t_j)\| \quad (\leq) \end{aligned}$$

Applichiamo la disuguaglianza triangolare: Integriamo l'ultimo termine e maggioriamo il secondo:

$$\begin{aligned} (\leq) &(t_{j+1} - t_j)\varepsilon + \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} r'(t_j) - r'(t) dt \right\| + \|r(t_{j+1}) - r(t_j)\| \\ &\leq 2\varepsilon(t_{j+1} - t_j) + \|r(t_{j+1}) - r(t_j)\|. \end{aligned}$$

Sommando quanto trovato per tutti i  $j$  abbiamo

$$\int_a^b \|r'(t)\| dt \leq 2\varepsilon(b - a) + \ell(\Gamma_{\mathcal{D}_\varepsilon})$$

e, facendo tendere  $\varepsilon$  a 0, si ha la tesi:

$$\int_a^b \|r'(t)\| dt \leq \ell(\gamma, r). \quad \square$$

**ESEMPIO.** Consideriamo la circonferenza  $(\gamma, r_1)$ :

$$r_1(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix}; \quad r_1'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi], \quad R > 0$$

Essendo la curva  $\mathcal{C}^1$  e regolare, si può applicare il teorema appena dimostrato:

$$\|r_1'(t)\| = \sqrt{(-R \sin(t))^2 + (R \cos(t))^2} = R; \quad \ell(\gamma, r_1) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

**OSSERVAZIONE.** Se consideriamo due curve con lo stesso sostegno ma diversa parametrizzazione, si osserva che il calcolo della lunghezza della curva dà per risultato lo spazio

effettivamente percorso del punto mobile.

$$r_2(t) = \begin{pmatrix} R \cos(2t) \\ R \sin(2t) \end{pmatrix} \quad r_2'(t) = \begin{pmatrix} -2R \sin(2t) \\ 2R \cos(2t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi], \quad R > 0$$

$$\|r_2'(t)\| = \sqrt{(-2R \sin(2t))^2 + (2R \cos(2t))^2} = 2R \quad \ell(\gamma, r_2) = \int_0^{2\pi} 2R dt = 4\pi R = 2\ell(\gamma, r_1).$$

### 3.4 UNIONE DI 2 CURVE

#### DEFINIZIONE 3.4.I. (CURVA UNIONE).

Date due curve  $(\gamma_1, r_1)$  e  $(\gamma_2, r_2)$  tali che:

- $r_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ;
- $r_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2$ ;
- $r_1(b_1) = r_2(a_2)$ ;

definiamo la **curva unione**  $(\gamma_1 \cup \gamma_2, r)$  di  $(\gamma_1, r_1)$  e  $(\gamma_2, r_2)$  come la curva con supporto  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  e parametrizzazione

$$r(t) = \begin{cases} r_1(t) & \text{se } t \in [a_1, b_1] \\ r_2(t + a_2 - b_1) & \text{se } t \in (b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}.$$

### 3.5 PROPRIETÀ DELLA LUNGHEZZA DELLE CURVE

#### PROPRIETÀ 3.5.I. (INVARIANZA DELLA LUNGHEZZA PER RIPARAMETRIZZAZIONE).

Siano  $(\gamma, r)$  e  $(\gamma, \tilde{r})$  due curve equivalenti. Allora hanno la stessa lunghezza.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$  e sia  $\phi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$  un cambiamento di parametro. Consideriamo  $(\gamma, \tilde{r})$  con  $\tilde{r}(t) = r \circ \phi(t)$  e calcoliamone la lunghezza:

$$\begin{aligned} \ell(\gamma, \tilde{r}) &= \int_{\alpha}^{\beta} \|\tilde{r}'(\tau)\| d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \|r'(\phi(\tau))\phi'(\tau)\| d\tau \quad (\equiv) \end{aligned}$$

Essendo  $\phi'(\tau)$  una quantità scalare, si può far uscire dalla norma:

$$(\equiv) \int_{\alpha}^{\beta} |\phi'(\tau)| \cdot \|r'(\phi(\tau))\| d\tau \quad (\equiv)$$

Consideriamo  $\phi'(\tau) < 0$ ,<sup>a</sup> allora:

$$(\equiv) \int_{\alpha}^{\beta} |\phi'(\tau)| \cdot \|r'(\phi(\tau))\| d\tau = - \int_{\alpha}^{\beta} \phi'(\tau) \cdot \|r'(\phi(\tau))\| d\tau \quad (\equiv)$$

Sia il cambio di variabile  $t = \phi(\tau)$ . Allora  $dt = \phi'(\tau) d\tau$  e quindi

$$(\equiv) - \int_{\phi(\alpha)=b}^{\phi(\beta)=a} \|r'(t)\| dt = \int_a^b \|r'(t)\| dt = \ell(\gamma, r). \quad \square$$

<sup>a</sup>Il caso è analogo per  $\phi'(\tau) > 0$ .

**DEFINIZIONE 3.5.1. (CURVA REGOLARE A TRATTI).**

Una curva  $r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$  si dice **regolare a tratti** se esiste una partizione dell'intervallo  $[a, b]$  tale che la restrizione di  $r$  a  $[t_j, t_{j+1}]$  è regolare per ogni indice  $j$  della partizione.

**OSSERVAZIONE.** È immediato verificare che il Teorema 3.1 si può applicare anche se la curva data è soltanto regolare a tratti.

Le *poligonali* e le *unioni finite di curve regolari* sono esempi di curve regolari a tratti.

**OSSERVAZIONE.** Per definizione di curve equivalenti, esse hanno lo stesso sostegno; tuttavia, *non vale il viceversa*. Per esempio, le due curve

$$r_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$r_2 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso sostegno  $S^1$ , ma non sono equivalenti in quanto la seconda curva non è semplice. Tuttavia, *due curve con lo stesso sostegno che siano semplici e regolari a tratti sono equivalenti*. Si può quindi parlare di **lunghezza di un sostegno**.

## 3.6 ASCISSA CURVILINEA

Sia  $(\gamma, r)$  una curva regolare con parametrizzazione  $r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ . Sia  $L = \ell(\gamma, r)$  la sua lunghezza. Definiamo la funzione:

$$s : [a, b] \longrightarrow [0, L], \quad t \mapsto \int_a^t \|r'(\tau)\| d\tau.$$

Dato che  $s$  è biettiva e  $s'(t) = \|r'(t)\| \neq 0$ ,  $s$  è un cambiamento di variabile invertibile. Denotiamo  $\phi$  la sua inversa:

$$\phi : [0, L] \longrightarrow [a, b].$$

Il cambiamento di parametro  $\phi$  è detto **ascissa curvilinea**, **lunghezza d'arco** o **arcollunghezza**.

**OSSERVAZIONE.** Una parametrizzazione che ha per parametro l'ascissa curvilinea percorre tutta la curva a velocità *costante*. Infatti, consideriamo il vettore derivata, che per la regola della catena si esprime come

$$\xi'(s) = \phi'(s) r'(\phi(s)).$$

Poiché vale

$$\phi'(s) = \frac{1}{\|r'(\phi(s))\|},$$

la norma del vettore derivata è

$$\|\xi'(s)\| = \frac{r'(\phi(s))}{\|r'(\phi(s))\|} = 1.$$

**INTUITIVAMENTE...** Parametrizzare con l'ascissa curvilinea significa parametrizzare lo spostamento del punto mobile rispetto allo spazio percorso: ha senso che la derivata dello spazio rispetto allo spazio risulti 1.

**ESEMPIO.** Abbiamo già ben visto che una parametrizzazione della circonferenza è  $r(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . La lunghezza è

$$\ell(\gamma, r) = \int_0^{2\pi} r \, dt = 2\pi r.$$

Possiamo allora definire la funzione:

$$\begin{aligned} s(t) : [0, 2\pi] &\longrightarrow [0, 2\pi r] \\ t &\longmapsto \int_0^t r \, dt = rt. \end{aligned}$$

Da  $s(t) = rt$  otteniamo l'inversa  $t = \frac{s}{r}$ ,  $s \in [0, 2\pi r]$ . Possiamo riparametrizzare la circonferenza come

$$r(s) = \left( r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right), \quad t \in [0, 2\pi r],$$

ma  $\ell(\gamma, r)$  rimarrà

$$\ell(\gamma, r) = \int_0^{2\pi r} 1 \, ds = 2\pi r.$$

**NOTAZIONE.** Generalmente  $ds$ , dove non specificato, indica una parametrizzazione con la lunghezza d'arco. Adottiamo anche noi questa convenzione nel seguito.

### 3.8 INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE

**DEFINIZIONE 3.8.I. (INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE).**

Sia  $(\gamma, r)$  una curva regolare a tratti e sia  $r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ . Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$  continua tale che  $\gamma \subseteq A$ . Si definisce **integrale curvilineo di prima specie** di  $f$  lungo  $\gamma$  la quantità scalare

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| \, dt.$$

**OSSERVAZIONE.** L'integrale curvilineo si indica *solamente* rispetto al sostegno, in quanto è invariante rispetto alla parametrizzazione.

Se  $\gamma$  è una curva piana e sia  $f : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f > 0$ . Allora l'integrale curvilineo rappresenta l'area della superficie delimitata da  $\gamma$  e dall'insieme  $f(\gamma)$ .

**OSSERVAZIONE.** Se  $f \equiv id$ ,  $\forall x \in \gamma$ , allora  $\int_{\gamma} f \, ds = \ell(\gamma, r)$ .

**PROPRIETÀ 3.8.I. (DELL'INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE).**

Siano  $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$  due funzioni continue. Allora valgono le seguenti proprietà:

1.  $\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_{\gamma} f ds + \beta \int_{\gamma} g ds;$
2. Se per ogni  $x \in \mathbb{R}^m$  vale  $f(x) \leq g(x)$ , allora  $\int_{\gamma} f ds \leq \int_{\gamma} g ds;$
3.  $|\int_{\gamma} f ds| \leq \int_{\gamma} |f| ds;$

□

Le prime due garantiscono che l'integrale curvilineo è un operatore lineare, mentre l'ultima è analoga alla disuguaglianza per gli integrali definiti.

**OSSERVAZIONE.** Se  $\gamma$  è parametrizzata con la lunghezza d'arco, allora

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\xi(s)) \underbrace{\|\xi'(s)\|}_{=1} ds = \int_a^b f(\xi(s)) ds .$$

### 3.8.1 Interpretazione fisica dell'integrale curvilineo

Da un punto di vista fisico, l'integrale curvilineo può essere considerato come la *distribuzione di una massa* lungo un oggetto filiforme. Infatti, possiamo rappresentare il filo con una curva a valori in  $\mathbb{R}^3$  ed esprimere la sua densità con una funzione

$$\mu = \mu(x, y, z) .$$

La massa si definisce in modo analogo a quanto visto nel corso di FISICA 1:

**DEFINIZIONE 3.8.2. (MASSA DI UN FILO).**

La massa di un oggetto filiforme  $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$  è pari a

$$\int_{\gamma} \mu ds .$$

**OSSERVAZIONE (COORDINATE DEL BARICENTRO).**

Le coordinate del baricentro del filo sono le seguenti:

$$x_b = \frac{1}{\int_{\gamma} \mu ds} \int_{\gamma} x \mu ds ;$$

$$y_b = \frac{1}{\int_{\gamma} \mu ds} \int_{\gamma} y \mu ds ;$$

$$z_b = \frac{1}{\int_{\gamma} \mu ds} \int_{\gamma} z \mu ds .$$



# CAMPI VETTORIALI E 1-FORME

“Ricordati – non puoi teletrasportarti attraverso un campo di forze. Pertanto, non ci provare.”

STAR TREK, *Capitano Kirk*.

**L**A TEORIA dei campi nasce in fisica, quella delle forme in matematica: sono enti matematici che tratteremo l'uno in parallelo con l'altro per via della loro corrispondenza biunivoca; nell'enunciare teoremi e definizioni adotteremo quindi spesso il punto di vista più intuitivo o opportuno. Il lettore sia comunque ben consapevole che *sono oggetti di natura diversa* e la teoria delle forme differenziali è in realtà più vasta di quella dei campi vettoriali.

## 4.1 CAMPI E 1-FORME: DEFINIZIONI

### RICORDIAMO... (CAMPO VETTORIALE).

Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione  $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$  continua su  $A$  si dice **campo vettoriale**.

### DEFINIZIONE 4.1.1. (1-FORMA).

Si dice **forma differenziale lineare** o **1-forma** una funzione  $\omega : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ , dove  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è aperto e  $(\mathbb{R}^n)^*$  è lo *spazio duale* di  $\mathbb{R}^n$ , ovvero l'insieme delle applicazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \omega : A &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \\ \mathbf{x} &\longmapsto \omega(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

Una forma è dunque una funzione che associa a ogni punto del dominio un'applicazione lineare.

**OSSERVAZIONE.**  $\omega(\mathbf{x})$  si può scrivere come combinazione lineare di elementi della base duale della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Dette  $(dx_1, \dots, dx_n)$  la base duale della canonica di  $\mathbb{R}^n$  e



$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ , si ha:

$$dx_j(\mathbf{e}_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad \omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{x}) dx_i$$

dove  $\omega_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$  e  $\delta$  è il **Delta di Kronecker**

$$\delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Si dice che  $\omega$  è una forma lineare:

- **continua** se i coefficienti  $\omega_i$  sono continui su  $A \forall i$ ;
- $\mathcal{C}^k$  su  $A$  se  $\omega_i$  sono  $\mathcal{C}^k$  su  $A, \forall i$ .

La definizione non lo richiede, ma in questo corso lavoreremo soltanto con insiemi *aperti* e *connessi*.

**OSSERVAZIONE.** Data  $f \in \mathcal{C}^1(A)$ , l'applicazione

$$\begin{aligned} df : A &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \\ \mathbf{x} &\longmapsto d_{\mathbf{x}}f \end{aligned}$$

è una forma differenziale continua su  $A$ .

**OSSERVAZIONE.** L'applicazione  $dx_j$  è il differenziale della proiezione  $\pi_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ :

$$\nabla \pi_j = \mathbf{e}_j \quad d\pi_j(\mathbf{e}_i) = \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = \delta_{ij} = dx_j(\mathbf{e}_i).$$

#### 4.1.1 Corrispondenza tra campi vettoriali e forme differenziali

Data una forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{x}) dx_i$$

a essa è associato il campo vettoriale

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \omega_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Viceversa, fissato un campo

$$\begin{aligned} F : A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a esso è associata la forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n F_i(\mathbf{x}) dx_i.$$

## 4.2 INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE

**DEFINIZIONE 4.2.I. (INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE).**

Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $(\gamma, r)$  una curva regolare a tratti con sostegno in  $A$  e parametrizzazione  $r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  e  $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale. Si definisce l'**integrale curvilineo di seconda specie** di  $F$  lungo  $(\gamma, r)$  la quantità scalare

$$\int_{\gamma} F ds = \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n F_j(r(t)) r'_j(t) dt. \quad (4.1)$$

Equivalentemente, sia  $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n F_j(\mathbf{x}) dx_j$  la forma differenziale associata a  $F$  continua su  $A$ . Si definisce l'**integrale curvilineo di seconda specie** di  $\omega$  lungo  $(\gamma, r)$  la quantità scalare

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} F ds. \quad (4.2)$$

**PROPRIETÀ 4.2.I. (DEGLI INTEGRALI CURVILINEI DI SECONDA SPECIE).**

1. Sia  $(\gamma, r)$  una curva,  $\gamma \subset A$ . Allora vale:

$$\int_{\gamma} (\alpha \omega_1 + \beta \omega_2) = \alpha \int_{\gamma} \omega_1 + \beta \int_{\gamma} \omega_2, \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in (\mathbb{R}^n)^*, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

L'insieme delle forme differenziali su  $A$  è quindi uno spazio vettoriale.

2. Sia  $\omega$  una forma differenziale e siano  $(\gamma, \tilde{r})$  e  $(\gamma, r)$  due curve equivalenti. Allora vale:

$$\int_{(\gamma, \tilde{r})} \omega = \begin{cases} \int_{(\gamma, r)} \omega & \text{se le due curve hanno lo stesso verso;} \\ - \int_{(\gamma, r)} \omega & \text{se le due curve hanno verso opposto.} \end{cases} \quad \square$$

## 4.2.1 Interpretazione fisica: il lavoro

L'integrale  $\int_{\gamma} F ds$  non è del tutto nuovo, poiché è già stato introdotto informalmente nel corso di *Fisica I*: infatti, rappresenta il lavoro compiuto dal campo di forze  $F$  per muovere un punto materiale dall'estremo iniziale a quello finale della curva  $(\gamma, r)$ .

**ESEMPIO (CAMPO GRAVITAZIONALE).**

Consideriamo il campo gravitazionale generato da una massa  $m$  posta nell'origine di  $\mathbb{R}^3$ . Il campo agisce su un punto di massa unitaria posto in  $P = (x, y, z) = r(t)$  con una forza

$$F(x, y, z) = -Gm \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|^3}; \quad r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Il lavoro di  $F$  lungo  $(\gamma, r)$  di estremi  $r(a), r(b)$  è

$$\begin{aligned} rCL &= -Gm \int_a^b \frac{\langle (x(t), y(t), z(t)), (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle}{\|(x(t), y(t), z(t))\|^3} dt \\ &= -Gm \int_a^b \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)}{(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))^{\frac{3}{2}}} dt. \end{aligned}$$

Osservando che il numeratore è la derivata del denominatore, concludiamo che

$$\begin{aligned} r_{CL} &= Gm(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))^{-\frac{1}{2}} \Big|_a^b \\ &= Gm \left( \frac{1}{\|r(b)\|} - \frac{1}{\|r(a)\|} \right). \end{aligned}$$

### 4.3 CAMPI CONSERVATIVI E FORME ESATTE

#### DEFINIZIONE 4.3.1. (CAMPO CONSERVATIVO).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale con  $F \in \mathcal{C}^1(A)$ . Il campo  $F$  si dice **conservativo** su  $A$  se esiste una funzione  $U : A \longrightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^2$  tale che:

$$\nabla U(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A. \quad (4.3)$$

Se esiste, la funzione  $U(\mathbf{x})$  è detta **potenziale**.

Analogamente, nel linguaggio delle forme:

#### DEFINIZIONE 4.3.2. (FORMA ESATTA).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $\omega : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  una forma differenziale con  $\omega \in \mathcal{C}^1(A)$ . La forma  $\omega$  si dice **esatta** su  $A$  se esiste una funzione  $U : A \longrightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^2$  tale che  $dU = \omega$ .

Per la dualità fra campi vettoriali e forme, un campo vettoriale è conservativo se e solo se è la forma differenziale associata è esatta.

**OSSERVAZIONE.** Se  $U$  è un potenziale di un campo vettoriale, lo è anche  $U + c$ . Viceversa, se  $U_1$  e  $U_2$  sono potenziali di un campo vettoriale, differiscono per una costante.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $U$  è un potenziale, vale (4.3), dunque

$$\nabla(U(x) + c) = F(x) + (c)' = F(x).$$

Se  $U_1$  e  $U_2$  sono potenziali di un campo vettoriale, allora

$$\nabla(U_1 - U_2) = \nabla U_1 - \nabla U_2 = F - F = 0$$

Essendo tale gradiente nullo in un dominio aperto e connesso,  $U_1 - U_2$  è una costante.  $\square$

**ATTENZIONE!** La dimostrazione del punto 2. è analoga a quella per gli integrali curvilinei di prima specie, ma il segno degli integrali di prima specie *non* dipende dal verso di percorrenza, mentre il segno di quelli di seconda specie *sì*!

#### 4.3.1 Integrale di un campo vettoriale conservativo

#### PROPOSIZIONE 4.3.1. (INTEGRALE DI UN CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO).

Sia  $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un campo conservativo e sia  $U$  un suo potenziale su  $A$ . Allora, data una curva

$(\gamma, r), r : [a, b] \longrightarrow A$  regolare a tratti, vale

$$\int_{\gamma} F ds = U(r(b)) - U(r(a)).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Basta dimostrare il teorema per una curva regolare per poi estenderlo ad una regolare a tratti. Si ha, utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale e la regola della catena,

$$\begin{aligned} U(r(b)) - U(r(a)) &= \int_a^b \frac{d}{dt}(U \circ r)(t) dt \\ &= \int_a^b \langle \nabla U(r(t)), r'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t) \rangle dt \\ &= \int_{\gamma} F ds. \end{aligned}$$

□

**OSSERVAZIONE.** L'integrale curvilineo di seconda specie di un campo conservativo dipende dunque solamente da dove inizia e da dove finisce la curva lungo cui si vuole integrare.

**TEOREMA 4.3.I. (CARATTERIZZAZIONE DELLE FORME ESATTE).**

Sia  $A$  aperto e connesso e sia  $\omega : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  una forma differenziale continua. Sono equivalenti le seguenti condizioni:

1. per ogni coppia di curve  $\gamma_1, \gamma_2$  regolari a tratti con sostegno in  $A$  che hanno gli stessi estremi, si ha:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega;$$

2. Per ogni curva  $\gamma$  chiusa e regolare a tratti

$$\int_{\gamma} \omega = 0;$$

3.  $\omega$  è esatta.

**DIMOSTRAZIONE.**

2)  $\implies$  1) Siano due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  regolari a tratti con estremi in comune e sia  $\gamma = \gamma_1 \cup -\gamma_2$ . Allora  $\gamma$  è chiusa, dunque

$$\int_{\gamma} \omega = 0 \implies \int_{\gamma_1 \cup -\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0 \implies \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

3)  $\implies$  2)  $\omega$  è esatta, quindi dato un potenziale  $U$  di  $\omega$  su  $A$  si ha che

$$\int_{\gamma} \omega = U(r(b)) - U(r(a)).$$

Essendo  $\gamma$  chiusa e regolare per ipotesi vale  $r(b) = r(a)$  che implica  $U(r(b)) = U(r(a))$ .

1)  $\implies$  3) Dobbiamo mostrare che  $\omega$  ammette un potenziale su  $A$ . Fissiamo un punto

$x_0 \in A$  e definiamo per ogni  $x \in A$

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_{x_0, x}} \omega$$

dove  $\gamma_{x_0, x}$  è una curva scelta arbitrariamente che ha  $\mathbf{x}_0$  come punto iniziale e  $\mathbf{x}$  come punto finale. Ciò è legittimo poiché per ipotesi  $U$  non dipende dalla curva scelta ma solo da  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_0$ . Se dimostriamo che  $U$  è un potenziale di  $\omega$  su  $A$ , esso sarà quello che si annulla in  $\mathbf{x}_0$ . Dobbiamo far vedere che  $\forall i = 1, \dots, n$

$$\exists \frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i(\mathbf{x})$$

su  $A$ , così da avere  $\nabla U(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ . Studiamo il rapporto incrementale di  $U(\mathbf{x})$ , indicando con  $\Gamma_h$  il segmento corrispondente all'incremento  $h$  di  $\mathbf{x}$  nella direzione  $\mathbf{e}_i$ , con parametrizzazione  $r_h(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{e}_i$ ,  $t \in [0, h]$ :

$$\frac{U(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - U(\mathbf{x})}{h} = \frac{1}{h} \left[ \int_{\gamma_{x_0, x+h\mathbf{e}_i}} \omega - \int_{\gamma_{x_0, x}} \omega \right] = \frac{1}{h} \left[ \int_{\gamma_{x_0, x}} \omega + \int_{\Gamma_h} \omega - \int_{\gamma_{x_0, x}} \omega \right] = \frac{1}{h} \int_{\Gamma_h} \omega \quad (\ominus)$$

Osserviamo che  $r'_h(t) = \mathbf{e}_i \forall i = 1, \dots, n$  e che

$$(\ominus) \frac{1}{h} \int_{\Gamma_h} \omega = \frac{1}{h} \int_{\Gamma_h} \langle F(r(t)), r'(t) \rangle dt = \frac{1}{h} \int_0^h \overbrace{F_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i)}^{g_i(t)} dt \quad (\ominus).$$

Per il Teorema della media integrale esiste  $\xi \in [0, h]$  tale che

$$(\ominus) \frac{1}{h} \int_0^h F_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) dt = g_i(\xi) = F_i(\mathbf{x} + \xi\mathbf{e}_i).$$

Passando al limite per  $h \rightarrow 0$  l'ampiezza dell'intervallo  $[0, h]$  tende a 0 e pertanto anche  $\xi$  tende a 0 essendo  $\xi \in [0, h]$ . Quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - U(\mathbf{x})}{h} = \frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}). \quad \square$$

**TIPS & TRICKS! (DI BISI).** Alla luce di quest'ultimo teorema, se sappiamo di avere una forma esatta, possiamo ricavare il suo potenziale utilizzando l'integrale curvilineo di seconda specie lungo una qualunque curva da un punto arbitrario  $\mathbf{x}_0$  al punto generico  $\mathbf{x}$ . Che curva scegliere, però? Per non complicarsi la vita, ci basta calcolarlo lungo una curva semplice che connetta i due punti, come un segmento o una poligonale: questo è il procedimento alla base del metodo delle poligonali, che vedremo a pag. 44.

#### 4.4 CAMPI IRROTAZIONALI E FORME CHIUSE

Il teorema appena dimostrato è uno strumento valido per stabilire che una forma differenziale non è esatta: basta mostrare che l'integrale curvilineo lungo una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti è diverso da 0. Purtroppo non è altrettanto efficace per dimostrare l'esattezza di una forma, poiché si dovrebbe provare che l'integrale lungo ogni curva chiusa è nullo. Tuttavia, esiste una classe di forme più ampia che, sotto certe condizioni specifiche, risulta coincidere con quella delle forme esatte.

**DEFINIZIONE 4.4.1. (FORMA CHIUSA).**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $\omega : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  una forma differenziale con  $\omega \in \mathcal{C}^1(A)$ . La forma  $\omega$  si dice **chiusa** su  $A$  se  $\forall i, j = 1, \dots, n$  le componenti  $\omega_i$  soddisfano

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

La nozione di forma chiusa ha un vantaggio *enorme* rispetto a quella di forma esatta: per vedere se una è tale, ci basta derivare delle funzioni - e non verificare che ogni integrale su curve chiuse si annulli!

Ovviamente, come per le forme esatte, esiste un corrisponde campo vettoriale particolare.

**DEFINIZIONE 4.4.2. (CAMPO IRROTAZIONALE).**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale con  $F \in \mathcal{C}^1(A)$ . Il campo  $F$  si dice **irrotazionale** su  $A$  se  $\forall i, j = 1, \dots, n$  le componenti  $F_i$  soddisfano

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

**DIGRESSIONE.** Il nome è dovuto al fatto che (4.4.2) equivale a dire che il rotore di  $F$  è nullo.

Per la dualità fra campi vettoriali e forme, un campo vettoriale è irrotazionale se e solo se la forma differenziale associata è chiusa. La proprietà che segue dà alito alle nostre speranze:

**PROPOSIZIONE 4.4.1. (LE FORME ESATTE SONO CHIUSE).**

Sia  $\omega : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  una forma differenziale di classe  $\mathcal{C}^1$  su  $A$ . Se  $\omega$  è esatta su  $A$ , allora  $\omega$  è chiusa su  $A$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\omega$  esatta e sia  $U$  un potenziale di  $\omega$  su  $A$ : dalla definizione (4.3) di potenziale  $U$  sarà di classe  $\mathcal{C}^2(A)$  e  $\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i(\mathbf{x}) \forall x \in A, \forall i = 1, \dots, n$ . Deriviamo ora rispetto a  $x_j$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (F_i(\mathbf{x})).$$

Essendo  $U \in \mathcal{C}^2(A)$  si ha, per il *Teorema di Schwartz*:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial U}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \square.$$

Da questa proposizione sappiamo che tutte le forme esatte sono anche chiuse, ma il viceversa vale? Ahimè, **no**.

**ESEMPIO (FORMA ARGOMENTO).**

La forma

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \quad \text{Dom}(\omega) = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$$

è detta **forma argomento**, ed è un classico controesempio della proposizione precedente. Studiando le derivate parziali rispetto a  $x$  e a  $y$  vediamo che  $\omega$  è chiusa su  $\text{Dom}(\omega)$ ...

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

...ma ciò nonostante  $\omega$  non è esatta: se prendiamo la circonferenza unitaria  $(\gamma, r)$ , con parametrizzazione

$$r : [0, 2\pi] \longrightarrow A; \quad r(t) = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j}; \quad r'(t) = -R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j}$$

si ha che

$$F(r(t)) = \left( \frac{-R \sin t}{(R \cos t)^2 + (-R \sin t)^2}, \frac{R \cos t}{(R \cos t)^2 + (-R \sin t)^2} \right)$$

$$= \left( \frac{-R \sin t}{R^2}, \frac{R \cos t}{R^2} \right);$$

calcolando l'integrale curvilineo lungo  $(\gamma, r)$  si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), r'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Avendo mostrato che l'integrale lungo una curva chiusa - come la circonferenza - è diverso da 0, la forma non può essere esatta.

Tuttavia, non disperiamoci. Come avevamo anticipato, sotto certe condizioni le due classi di forme coincidono. Per dimostrare una tale condizione sufficiente, introduciamo ora una nozione topologica.

#### DEFINIZIONE 4.4.3. (DOMINIO STELLATI).

Un aperto connesso si dice **stellato** rispetto a un punto  $\mathbf{x}_0$  se  $\forall \mathbf{x} \in A$  il segmento di estremi  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$  è contenuto in  $A$ .

Su questi particolari aperti, vale il seguente:

#### TEOREMA 4.4.1. (LEMMA DI POINCARÉ PER DOMINI STELLATI).

Sia  $\omega : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  una forma differenziale,  $\omega \in C^1(A)$  e sia  $A$  stellato. Allora  $\omega$  è chiusa su  $A$  se e solo se  $\omega$  è esatta su  $A$ .

#### DIMOSTRAZIONE.

$\Leftarrow$ ) Sempre vero per la Proposizione 4.4.1.

$\Rightarrow$ ) Definiamo

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}}} \omega \quad \forall \mathbf{x} \in A$$

con  $\Gamma_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}}$  il segmento di estremo iniziale  $\mathbf{x}_0$  e finale  $\mathbf{x}$ . Dimostriamo che  $U$  è un potenziale di  $\omega$  su  $A$ . Per semplicità supponiamo  $\mathbf{x}_0 = 0$  e parametrizziamo  $[0, \mathbf{x}]$  con  $r(t) = t\mathbf{x}$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Otteniamo quindi

$$U(\mathbf{x}) = \int_0^1 \langle F(t\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle dt.$$

Per il Teorema di derivazione sotto il segno d'integrale abbiamo<sup>a</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \langle F(tx), \mathbf{x} \rangle dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} (F_1(t\mathbf{x})x_1 + \dots + F_n(t\mathbf{x})x_n) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} [F_1(\underline{tx_1}, tx_2, \dots, tx_n)x_1 + F_2(\underline{tx_1}, tx_2, \dots, tx_n)x_2 + \dots \\ &\quad + F_n(\underline{tx_1}, tx_2, \dots, tx_n)x_n] dt \\ &= \int_0^1 F_1(t\mathbf{x}) + \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(t\mathbf{x})tx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(t\mathbf{x})(tx_2) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(t\mathbf{x})tx_n}_{=\langle \nabla F_1(t\mathbf{x}), t\mathbf{x} \rangle} dt \\ &= \int_0^1 F_1(t\mathbf{x}) + \langle \nabla F_1(t\mathbf{x}), t\mathbf{x} \rangle dt. \end{aligned}$$

Integriamo per parti, osservando che:

$$\begin{aligned} \langle \nabla F_1(t\mathbf{x}), t\mathbf{x} \rangle &= t \frac{d}{dt} f_1(tx) = t \frac{d}{dt} (F_1 \circ r)(t) = t d_{tx} F_1 \circ d_t r = t \langle \nabla F_1(r(t)), r'(t) \rangle \\ &= t \langle \nabla F_1(t\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

Quindi: ripetendo il ragionamento per tutti gli  $F_i(\mathbf{x})$  si ha la tesi.  $\square$

<sup>a</sup>Sottolineiamo ciò che deriviamo per facilitare la lettura.

**OSSERVAZIONE.** Lo spazio  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  non è stellato - ad esempio, il segmento tra  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$  non è interno ad esso. Più in generale,  $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ , con  $p$  generico punto di  $\mathbb{R}^n$ , non è stellato in quanto è sempre possibile trovare un segmento con estremi in  $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$  che passa per  $p$ .

L'esattezza e la chiusura dunque coincidono se parliamo di domini stellati; tuttavia, molti aperti non lo sono affatto, come abbiamo appena osservato! Possiamo però considerare una nozione topologica più generale rispetto ai domini stellati, con l'idea di far valere il *Lemma di Poincaré* per qualche spazio in più. Per fare ciò, parliamo di

#### DEFINIZIONE 4.4.4. (CURVE OMOTOPE).

Sia  $A$  un aperto connesso e siano  $(\gamma_1, r_1)$  e  $(\gamma_2, r_2)$  due curve con  $r_1, r_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tali che  $r_1(a) = r_2(a) = P_0$  e  $r_1(b) = r_2(b) = P_1$ . Allora  $(\gamma_1, r_1)$  e  $(\gamma_2, r_2)$  si dicono curve **omotope** se esiste una funzione  $\varphi : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow A$  continua tale che:

1.  $\varphi(a, \lambda) = P_0$  e  $\varphi(b, \lambda) = P_1 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ ;
2.  $\varphi(t, 0) = r_1(t)$  e  $\varphi(t, 1) = r_2(t)$ .

La Definizione 4.4.4 garantisce che esiste una *deformazione continua* di  $\gamma_1$  in  $\gamma_2$ : al variare di  $\lambda$  otteniamo delle curve che *rimangono in  $A$*  e variano con continuità da  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ . Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono



chiusa, la condizione 1. equivale a  $\varphi(a, \lambda) = \varphi(b, \lambda) \forall \lambda \in [0, 1]$ .

**DEFINIZIONE 4.4.5. (SPAZIO SEMPLICEMENTE CONNESSO).**

Uno spazio topologico si dice **semplicemente connesso** se due qualsiasi curve con gli stessi estremi iniziale e finale sono omotope tra loro o, equivalentemente, se ogni curva chiusa è omotopa a un punto.

**OSSERVAZIONE.**  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  non è semplicemente connesso perché una qualsiasi circonferenza di centro l'origine non può essere deformata con continuità in un punto: durante il processo di deformazione la curva attraverserà sempre l'origine per un certo  $\lambda_0$  compreso tra 0 e 1. Fortunatamente,  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  invece è semplicemente connesso: durante il processo di deformazione la curva può passare "aggirare" l'origine, evitando il punto di discontinuità e restando sempre all'interno dell'insieme. Per lo stesso motivo,  $\mathbb{R}^n$  privato di un qualsiasi punto è semplicemente connesso per  $n \geq 0$ .

**ATTENZIONE!** Bisogna sempre prestare attenzione allo spazio di cui stiamo parlando:  $x^2 + y^2 = R^2$  in  $\mathbb{R}^3$  è l'equazione di un *cilindro infinito*, non di una circonferenza, e  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  - o anche  $\mathbb{R}^3$  privato soltanto di una retta - non è semplicemente connesso.

Vale il seguente:

**TEOREMA 4.4.2. (LEMMA DI POINCARÉ PER APERTI SEMPLICEMENTE CONNESSI).**

Sia  $A$  un aperto semplicemente connesso e sia  $\omega$  una forma differenziale chiusa di classe  $C^1$  su  $A$ . Allora  $\omega$  è esatta su  $A$ . □

**OSSERVAZIONE.** Sia  $\omega : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ , una forma chiusa e non esatta su  $A$  di classe  $C^1$ : da queste ipotesi si può dedurre immediatamente che  $A$  non è semplicemente connesso, altrimenti si potrebbe applicare il Teorema 4.4.2. Supponiamo allora che  $B \subset A$ ,  $B$  aperto semplicemente connesso: per lo stesso teorema 4.4.2  $\omega$  è esatta su  $B$ , quindi esiste un potenziale  $U : B \longrightarrow \mathbb{R}$  di  $\omega$  su  $B$ . Per questo motivo le forme chiuse sono anche dette **localmente esatte**, perché per ogni punto del dominio della forma chiusa esiste sempre un intorno sufficientemente piccolo su cui la forma ammette potenziale.

4.4.1 *Primitive della forma argomento su sottoinsiemi del dominio*

Sia data la forma argomento

$$\omega_0(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

definita su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Come visto, tale forma è chiusa ma non esatta nel suo dominio. Tuttavia, possiamo determinarne una primitiva su opportuni sottoinsiemi del dominio. Ad esempio, cominciamo col considerare il semipiano  $x > 0$  che è semplicemente connesso e mostriamo che su di esso la forma argomento è anche esatta. Possiamo calcolarne una primitiva  $U_0(x, y)$  risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \partial_x U_0(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \\ \partial_y U_0(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

È facile verificare che una soluzione<sup>1</sup> del sistema è la funzione

$$U_0(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Consideriamo ora il semipiano  $y > 0$ . Ragionando come per il caso precedente, si ottiene che la generica primitiva su tale semipiano è

$$U_1(x, y) = c - \arctan\left(\frac{x}{y}\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che le due primitive trovate coincidono nell'intersezione dei due semipiani, ovvero il primo quadrante, se e solo se  $c = \frac{\pi}{2}$ . Infatti, si verifica facilmente che la funzione  $f(t) = \arctan t + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$  è costante a tratti in quanto ha derivata nulla in tutto il dominio e precisamente vale:

$$\arctan t + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } t > 0; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Pertanto, per  $x > 0, y > 0$  si ha che  $U_0(x, y) = U_1(x, y)$  se e solo se  $c = \frac{\pi}{2}$ . In modo analogo, nel semipiano  $x < 0$ , la funzione  $U_2(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c'$  è ancora una primitiva di  $\omega_0$  per ogni  $c' \in \mathbb{R}$ . Ragionando come prima,  $U_2$  coincide con  $U_1$  nel secondo quadrante se e solo se  $c' = \pi$ . Pertanto abbiamo costruito una primitiva di  $\omega_0$  sull'insieme  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \leq 0\}$ . Essa è data dalla funzione

$$U(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y > 0; \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & x \leq 0, y > 0; \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0, y \leq 0. \end{cases}$$

Osserviamo tuttavia che la funzione  $U(x, y)$  non si può estendere per continuità al semiasse negativo delle  $y$  in quanto per  $y < 0$  fissato vale

$$\frac{3\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

**OSSERVAZIONE.** Con questo processo si può trovare un potenziale su  $\mathbb{R}^2$  privato di una qualsiasi semiretta (anche diversa da uno degli assi cartesiani)

#### 4.4.2 Campi centrali

##### DEFINIZIONE 4.4.6. (CAMPO CENTRALE).

Si dice **campo centrale** un campo vettoriale del tipo:

$$F(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, n \geq 2$$

**PROPOSIZIONE (I CAMPI CENTRALI SONO CONSERVATIVI SU  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ).**

<sup>1</sup>Le altre soluzioni si ottengono aggiungendo a  $U_0(x, y)$  una costante reale.

**DIMOSTRAZIONE.** Dato un generico campo centrale  $F$ , mostriamo l'esistenza di un potenziale  $U : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Per essere tale, deve soddisfare

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|) \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|} \quad \forall i.$$

Osserviamo che se  $\Phi(x)$  è una primitiva di  $\varphi(x)$  su  $(0, +\infty)$  allora si ha, usando la regola della catena,

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \Phi'(\|\mathbf{x}\|) \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Phi(\|\mathbf{x}\|)), \quad \forall i \implies U(\mathbf{x}) = \Phi(\|\mathbf{x}\|) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \square$$

**ESEMPIO.** Il campo gravitazionale è un campo centrale. Si osserva che

$$F(\mathbf{x}) = -Gm \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} = \frac{\overbrace{-Gm}^{\varphi(\|\mathbf{x}\|)}}{\|\mathbf{x}\|^2} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

dove

$$\begin{aligned} \varphi : (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto -\frac{Gm}{r^2} \end{aligned}$$

Il potenziale del campo gravitazionale risulta dunque

$$U(\mathbf{x}) = \int \varphi(\|\mathbf{x}\|) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = +\frac{Gm}{r}.$$

#### 4.5 TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

##### **TEOREMA 4.5.I. (ENERGIA CINETICA).**

Sia  $F(\mathbf{x})$  un campo di forze dipendente dalla posizione che agisce su un punto materiale di massa  $m$  e la fa scorrere da un estremo all'altro di una curva  $(\gamma, r) \in \mathcal{C}^2$  e  $r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . Allora

$$L = \frac{1}{2} m [r'(b)^2 - r'(a)^2].$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che il lavoro per definizione è

$$L = \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t) \rangle dt.$$

Essendo la massa  $m$  una quantità scalare, allora

$$\int_a^b \langle F(r(t)), r'(t) \rangle dt = m \int_a^b \langle r''(t), r'(t) \rangle dt.$$

Osservando che  $\|r'(t)\|^2 = \langle r'(t), r'(t) \rangle$ , deriviamo:

$$\frac{d}{dt}(\|r'(t)\|^2) = \frac{d}{dt}(r_1'(t)^2 + \dots + r_n'(t)^2) = 2r_1'(t)r_1''(t) + \dots + 2r_n'(t)r_n''(t) = 2 \langle r''(t), r'(t) \rangle.$$

Quindi

$$L = m \int_a^b \langle r''(t), r'(t) \rangle = \frac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} (\|r'(t)\|)^2 dt = \frac{1}{2} m \|r'(t)\|^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} m [r'(b)^2 - r'(a)^2]. \quad \square$$

#### 4.6 † COME TROVARE UN POTENZIALE

**TIPS & TRICKS!** Dato che per definizione un potenziale  $U$  di una forma esatta  $\omega$  è tale che  $dU = \omega$ , se è noto che  $\omega$  è esatta si può sempre verificare se una funzione è un potenziale di una forma calcolandone il differenziale.

##### 4.6.1 Metodo delle integrazioni parziali

Come conseguenza immediata della definizione di forma esatta, si ha il seguente:

**TEOREMA 4.6.1. (METODO DELLE INTEGRAZIONI PARZIALI).**

Sia  $\omega = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$  un forma esatta su  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  e sia  $A$  aperto. Una funzione  $U : A \longrightarrow \mathbb{R}$  è un potenziale di  $\omega$  se risolve il seguente sistema:

$$\begin{cases} \partial_x U(x, y, z) = F_1 \\ \partial_y U(x, y, z) = F_2 \\ \partial_z U(x, y, z) = F_3 \end{cases} . \quad \square$$

**ATTENZIONE!** È sempre opportuno controllare che una forma sia chiusa prima di cercare di calcolarne un potenziale.

**ESEMPIO.** Un potenziale della forma chiusa

$$\omega(x, y, z) = 3x^2 y dx + x^3 dy - z dz$$

definita su  $\mathbb{R}^3$  si può ottenere risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \partial_x U(x, y, z) = 3x^2 y \\ \partial_y U(x, y, z) = x^3 \\ \partial_z U(x, y, z) = -z \end{cases} .$$

Integrando rispetto a  $x$  la prima equazione otteniamo

$$U(x, y, z) = x^3 y + \alpha(y, z) .$$

Derivando questa espressione rispetto a  $y$  e utilizzando la seconda equazione si ha

$$x^3 + \partial_y \alpha(y, z) = x^3 ,$$

quindi  $\partial_y \alpha(y, z) = 0$ , ovvero  $\alpha(y, z)$  non dipende da  $y$ : possiamo porre  $\alpha(x, y) = \beta(z)$ . Derivando ora  $U(x, y, z)$  rispetto a  $z$  e utilizzando la terza equazione del sistema otteniamo

$$\beta'(z) = -z \implies \beta(z) = -\frac{1}{2} z^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

e concludiamo che

$$U(x, y, z) = x^3y - \frac{1}{2}z^2 + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

#### 4.6.2 Metodo delle poligonal

##### TEOREMA 4.6.2. (METODO DELLE POLIGONALI).

Sia  $\omega = F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3$  un forma esatta su  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $A$  aperto e convesso e sia  $(x_0, y_0, z_0) \in A$ . Allora un potenziale  $U$  di  $\omega$  su  $A$  è

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x F_1(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y F_2(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z F_3(x, y, t) dt.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\omega$  è esatta, possiamo ottenere  $U$  come l'integrale di  $\omega$  lungo una qualsiasi curva di estremi  $(x_0, y_0, z_0) \in A$  fissato e  $(x, y, z)$ . Dal Teorema 4.3.I sappiamo che tale integrale dipende solo dagli estremi di integrazione, quindi come preannunciato nel *Tips & Tricks di Bisi* a pag. 36 calcoliamo in modo facile il potenziale lungo una poligonale:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : r_1(t) &= (t, y_0, z_0) & t \in [x_0, x] \\ \Gamma_2 : r_2(t) &= (x, t, z_0) & t \in [y_0, y] \\ \Gamma_3 : r_3(t) &= (x, y, t) & t \in [z_0, z]. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} rCU(x, y, z) &= \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega \\ &= \int_{x_0}^x F(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y F(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z F(x, y, t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE.** Il potenziale ottenuto con il metodo delle poligonal è quello che si annulla in  $(x_0, y_0, z_0)$ .

# II

## SUCCESSIONI DI FUNZIONI



# SUCCESSIONI DI FUNZIONI

---

“Al variare di  $n$  cosa succede a questo anime, a questo manga?”

ALESSANDRO IACOPETTI, *mangaka*.

UNA PRIMA intuizione del concetto di successione di funzioni è quello di successione a valori reali o complessi dipendente da un parametro: ci chiediamo quando e come tale successione converge - proprio per trattare il “come” dovremo abbandonare questa intuizione quasi subito... Ci occuperemo quasi esclusivamente di successioni di funzioni a una variabile (il “parametro”). Sottolineiamo subito l'utilità (vedi la citazione) di avere un'intuizione cinematica di cosa succede al variare di  $n \in \mathbb{N}$ .

## 5.1 CONVERGENZA IN CAMPO COMPLESSO

Prima di cominciare la trattazione vera e propria formalizziamo il concetto di convergenza in campo complesso, che ci servirà, oltre che nello studio di successioni di funzioni a valori complessi, in quello delle serie di potenze.

### DEFINIZIONE 5.1.1. (LIMITE PER SUCCESSIONI DI NUMERI COMPLESSI).

Sia  $z_n = a_n + ib_n$ , con  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  una successione di numeri complessi. Dato  $l \in \mathbb{C}$ , si dice il **limite** di  $z_n$  al crescere di  $n$  è uguale a  $l$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l$$

se vale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |z_n - l| < \varepsilon .$$

**OSSERVAZIONE.**  $z_n \rightarrow l$  se e solo se  $\Re(z_n) \rightarrow \Re(l)$  e  $\Im(z_n) \rightarrow \Im(l)$  .



## 5.2 SUCCESIONI DI FUNZIONI

**DEFINIZIONE 5.2.1. (SUCCESIONE DI FUNZIONI).**

Una **successione di funzioni** è una famiglia  $f_n: S \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , dove  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

In questo testo enunceremo la maggior parte delle definizioni e teoremi per funzioni della forma  $f_n: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ma quasi tutta la teoria si può estendere a  $\mathbb{C}$  senza problemi.

## 5.2.1 Convergenza di una successione di funzioni

Il caso più elementare che si incontra di “convergenza di funzioni” è quella in cui fissiamo un punto  $t \in S \subseteq \mathbb{K}$  e consideriamo, il limite  $f(t)$  della successione  $\{f_n(t)\}_n$ : se *punto per punto*, ossia per ogni  $t \in S$ , tale limite è finito, la collezione di questi definisce una funzione  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ .

**DEFINIZIONE 5.2.2. (CONVERGENZA PUNTUALE).**

Sia  $f_n: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni. Allora si dice che  $\{f_n\}$  **converge puntualmente** in  $S$  a una funzione  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  se

$$\forall t \in S, \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, t): n \geq N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Ben presto ci accorgiamo che la *convergenza puntuale* è piuttosto *debole*, in quanto non garantisce che le proprietà delle funzioni  $f_n$  come derivabilità, continuità, limitatezza, ecc... passino al limite!

**ESEMPIO.** Consideriamo la successione

$$\begin{array}{ccc} f_n: S \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & t^n \end{array}$$

Dato  $t \in [0, 1]$ , allora:

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t^n \begin{cases} 1 & \text{se } t = 1 \\ 0 & \text{se } t \in [0, 1) \end{cases}.$$

Mentre le varie funzioni  $f_n$  sono polinomi - e dunque funzioni lisce  $C^\infty$ , il limite non è neanche una funzione continua.

Vogliamo introdurre una nozione più forte di quella puntuale che ci permetta di portare le proprietà della successione di funzioni al limite.

**DEFINIZIONE 5.2.3. (CONVERGENZA UNIFORME).**

Sia  $f_n: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $\{f_n\}$  **converge uniformemente** a  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  su  $S$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): n \geq N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in S.$$

Equivalentemente,  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  se

$$\sup_{t \in S} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \implies \sup_{t \in S} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0$$

La definizione di *convergenza uniforme* può sembrare praticamente identica a quella della *convergenza puntuale*, ma c'è una grossa differenza: nel caso della convergenza puntuale la soglia  $N$  è dipendente, oltre che da  $\varepsilon$ , anche dal punto  $t$ , mentre nella convergenza uniforme la soglia  $N$  è la stessa per *qualsiasi* punto  $t \in S$  e dipende solo da  $\varepsilon$ . Per questo motivo, la convergenza uniforme implica sempre la convergenza puntuale, ma non necessariamente il viceversa: fissata la tolleranza  $\varepsilon$ , la soglia  $N$  potrebbe cambiare al variare di  $x \in S$ . A.

**DIGRESSIONE.** L'uso del termine “uniforme” non è casuale... perché abbiamo già visto nel corso di ANALISI MATEMATICA 1 una nozione simile. Infatti, la *continuità uniforme* differisce dalla *continuità puntuale* esattamente nello stesso modo in cui la convergenza uniforme differisce dalla puntuale: nella versione “uniforme” il valore  $N$  è indipendente dal punto specifico dell'insieme su cui è definita la funzione. Torneremo a parlare di continuità uniforme nella sezione 6.3.1, a pag. 84.

**ATTENZIONE!** È estremamente importante dire **dove** converge  $f_n$ : infatti, una stessa successione può convergere uniformemente su  $A$ , ma allo stesso tempo *non convergere* uniformemente in un altro insieme  $B$ .

**ESEMPIO.** Riprendiamo la successione di funzioni  $f_n = t^n$ . Sapendo che il limite puntuale è

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 1 \\ 0 & \text{se } t \in [0, 1) \end{cases}$$

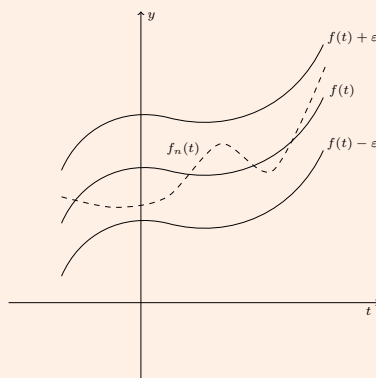
abbiamo che

$$|f_n(t) - f(t)| = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 1 \\ t^n & \text{se } t \in [0, 1) \end{cases}$$

Ma  $\sup_{t \in [0, 1)} t^n = 1$ , dunque la successione *non* converge a  $f$  uniformemente. Se consideriamo invece la stessa funzione ma in un intervallo  $[0, T]$  con  $T < 1$  allora si ha la convergenza uniforme, perché

$$\sup_{t \in [0, T]} |f_n(t) - f(t)| = T^n \rightarrow 0.$$

**OSSERVAZIONE.** Graficamente, la convergenza uniforme di  $f_n$  a  $f$  garantisce che per ogni  $\varepsilon$  esista un indice  $N$  tale che per ogni  $n > N$  la funzione  $f_n(t)$  sia contenuta in una “striscia” della forma  $(f(t) - \varepsilon, f(t) + \varepsilon)$ .



## 5.2.2 Due metodi per mostrare la convergenza uniforme

### 5.2.2.1 Convergenza uniforme tramite una maggiorazione

Come mostra il seguente esempio, si può cercare di mostrare la convergenza uniforme partendo dal limite puntuale con una maggiorazione *dipendente solo da  $n$*  e indipendente da  $t$ .

**ESEMPIO.** Sia

$$f_n(t) = \frac{1}{n} \sin(nt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Fissato  $t$ , per ogni  $t \in \mathbb{R}$  vale

$$\|f_n(t)\| \leq \frac{1}{n}$$

poiché  $|\sin(nt)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Da questa maggiorazione si ha immediatamente che  $f_n(t) \rightarrow 0$ , ovvero vale la convergenza puntuale e il limite è la funzione nulla; essendo la maggiorazione indipendente da  $t$ , si ha anche

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

ovvero vale la convergenza uniforme a 0.

### 5.2.2.2 Convergenza uniforme tramite calcolo dell'estremo superiore

Se non fosse possibile - o non fosse immediato - trovare una maggiorazione, non rimane che provare a determinare esplicitamente il valore del  $\sup_{t \in S} |f_n(t) - f(t)|$ .

**ESEMPIO.** Consideriamo la successione di funzioni:

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Poiché  $f_n(x) \rightarrow 0$ , si ha la convergenza puntuale alla funzione nulla. Per cercare l'eventuale convergenza uniforme, studiamo il comportamento del  $\sup |f_n(t) - f(t)|$ . Prima di cominciare, osserviamo che le  $f_n(x)$  sono funzioni dispari e  $f_n(0) = 0$ , per ogni  $n$ , quindi possiamo limitarci a studiarle in  $[0, +\infty)$  ed estendere poi i risultati ottenuti a tutto il piano per simmetria. Essendo il limite puntuale la funzione nulla, le funzioni  $f_n$  sono limitate e dunque l'estremo superiore è un massimo. Studiamo la monotonia delle  $f_n(x)$ :

$$f'_n(x) = ne^{-nx^2} - 2n^2x^2e^{-nx^2} = \underbrace{ne^{-nx^2}}_{>0} (1 - 2nx^2);$$

$$f'_n(x) \geq 0 \iff 1 - 2nx^2 \geq 0 \iff 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Per  $n$  fissato, il massimo di  $f_n(x)$  si ha quindi in  $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ . Allora, al crescere di  $n$ ,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2e}} \rightarrow +\infty \text{ se } n \rightarrow +\infty.$$

Non si ha, pertanto, convergenza uniforme su  $\mathbb{R}$ .

## 5.2.3 Successioni di Cauchy di funzioni

Come nel caso delle successioni numeriche, esiste dei **criteri di Cauchy** per le convergenze di funzioni:

**PROPOSIZIONE 5.2.1. (CRITERIO DI CAUCHY - CONVERGENZA PUNTUALE).**

Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione di funzioni  $\{f_n\}$  converga puntualmente su  $S \subseteq \mathbb{R}$  a  $f$  è che

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in S \quad \exists N = (t, \varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N, |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon. \quad \square$$

**PROPOSIZIONE 5.2.2. (CRITERIO DI CAUCHY - CONVERGENZA UNIFORME).**

Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione di funzioni  $\{f_n\}$  converga uniformemente su  $S \subseteq \mathbb{R}$  a  $f$  è che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = (\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N, |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in S,$$

o, equivalentemente,

$$\sup_{t \in S} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon. \quad \square$$

**OSSERVAZIONE.** Più in generale, entrambi i criteri valgono in un qualsiasi spazio metrico completo.

## 5.2.3.1 Convergenza di una successione di funzioni in due variabili

**DEFINIZIONE 5.2.4. (CONVERGENZA PER SUCCESSIONI A DUE VARIABILI).**

Sia  $f_n(s, t) : S \times T \longrightarrow \mathbb{C}$ ,  $S, T \subseteq \mathbb{C}$ .  $\{f_n\}$  **converge** a  $f$  uniformemente rispetto a  $s$  e puntualmente rispetto a  $t$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in T, \quad \exists N = (\varepsilon, t) \text{ tale che se } n \geq N \text{ vale } |f_n(s, t) - f(s, t)| < \varepsilon \quad \forall s \in S$$

Si può considerare, in modo analogo, la convergenza di funzioni facendo il limite rispetto a una variabile continua  $s \in \mathbb{R}$ .

**DEFINIZIONE 5.2.5. (CONVERGENZA UNIFORME PER SUCCESSIONI A DUE VARIABILI).**

Sia  $f(s, t) : S \times T \longrightarrow \mathbb{C}$ ,  $S, T \subseteq \mathbb{C}$ . Se  $s_0$  è un punto di accumulazione per  $S$  si dice che  $f(s, t)$  converge uniformemente a  $l(t)$  su  $T$  per  $s \rightarrow s_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, s_0) > 0 : 0 < |s - s_0| < \delta \implies |f(s, t) - l(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in T$$

## 5.2.4 Proprietà della convergenza uniforme

**TEOREMA 5.2.1. (DI LIMITATEZZA).**

Sia  $f_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni limitate su  $S$  che converge uniformemente a una funzione  $f$  su  $S$ . Allora  $f$  è limitata su  $S$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per ipotesi la convergenza è uniforme, quindi

$$\exists N = N(1): n \geq N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < 1, \quad \forall t \in S.^a$$

Dunque,  $\forall t \in S$ ,

$$|f(t)| = |f(t) - f_N(t) + f_N(t)| \leq |f_N(t)| + |f(t) - f_N(t)| \leq 1 + |f(t) - f_N(t)|.$$

Essendo  $f_N$  limitata per ipotesi, si ha

$$|f(t)| < 1 + \sup_{t \in S} |f_N(t)|,$$

e quindi  $f$  è limitata in  $S$ . □

<sup>a</sup>La scelta di  $\varepsilon$  nella definizione di convergenza uniforme è arbitraria.

**ESEMPIO.** Questo teorema non vale se  $\{f_n\}$  converge solo puntualmente in  $f$ . Consideriamo

$$f_n(t) : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{se } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ \sqrt{n} & \text{se } 0 < t < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Si vede infatti che  $\{f_n\}$  tende a  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ , che è una funzione *non* limitata.

**TEOREMA 5.2.2. (SCAMBIO DI LIMITI).**

Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni convergente a  $f$  uniformemente in  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\{\ell_n\}$  una successione a valori reali e  $t_0$  punto di accumulazione per  $S$ . Se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) = \ell_n, \tag{5.2}$$

allora

$$\lim_n \ell_n = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t), \text{ ovvero } \lim_n \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \lim_n f_n(t).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per prima cosa, dimostriamo che  $\ell_n$  converge. Per farlo, dimostriamo che  $\ell_n$  è di Cauchy, quindi convergente in uno spazio metrico completo. Siano  $\ell_n, \ell_m$ :

$$|\ell_n - \ell_m| = |\ell_n - f_n(t) + f_n(t) - f_m(t) + f_m(t) - \ell_m| \leq |\ell_n - f_n(t)| + |f_n(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - \ell_m|.$$

Fissato  $\varepsilon > 0$ , si ha, dall'ipotesi di convergenza uniforme,

$$\exists N = N(\varepsilon): \forall n, m \geq N \Rightarrow |f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t \in S.$$

Da (5.2) sappiamo che per lo stesso  $\varepsilon$  esisterà un  $\delta_1$  tale che se  $|t - t_0| < \delta_1$  allora  $|\ell_n - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$  e un  $\delta_2$  tale che se  $|t - t_0| < \delta_2$  allora  $|f_m(t) - \ell_m| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Dunque,  $\forall n, m \geq N, |t - t_0| < \delta =$

$\min\{\delta_1, \delta_2\}$  si ha

$$|\ell_n - \ell_m| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

e pertanto la successione è di Cauchy. Sia ora  $\ell = \lim_n \ell_n$  e dimostriamo che  $\ell = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ . Sappiamo che  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$  tale che, se  $n \geq N$

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |\ell_n - \ell| < \varepsilon.$$

Allora

$$|f(t) - \ell| = |f(t) - f_n(t) + f_n(t) - \ell_n + \ell_n - \ell| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|.$$

Poiché  $\ell_N = \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t)$  allora,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) : |t - t_0| < \delta \implies |\ell_n - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dalla convergenza di  $\{f_n\}$  e di  $\{\ell_n\}$  si ha che  $\exists \tilde{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$\forall n \geq \tilde{n} |f(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad |\ell_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

quindi se  $|t - t_0| < \delta$  e  $n \geq \tilde{n}$

$$|f(t) - \ell| < \varepsilon,$$

cioè  $\ell = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ . □

### COROLLARIO 5.2.1. (DI CONVERGENZA PER SUCCESIONI).

Sia  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $S$  e siano  $f_n$  continue in  $S$ . Allora  $f$  è continua in  $S$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $t_0$  di accumulazione per  $S$ . Allora

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t).$$

Essendo  $f_n$  continue, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t_0) = f(t_0). \quad \square$$

### TEOREMA 5.2.3. (PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE).

Sia  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni continue che converge uniformemente su  $[a, b]$  in  $f$ . Allora

$$\lim_n \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $f_n \rightarrow f$  uniformemente e le  $f_n$  sono continue, allora  $f$  è continua, quindi integrabile su  $[a, b]$ . Dunque

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b f_n(t) - f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt.$$

Dalla definizione di convergenza uniforme, fissato  $\varepsilon > 0$ , si ha che

$$\exists N = N(\varepsilon): n \geq N \implies |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \implies \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Per arbitrarietà di  $\varepsilon$ , si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt. \quad \square$$

**OSSERVAZIONE.** L'ipotesi di *continuità* delle funzioni  $f_n$  garantisce che  $f$  sia integrabile, ma non l'abbiamo utilizzata durante la dimostrazione. In effetti si può dimostrare che è sufficiente l'*integrabilità* delle funzioni  $f_n$  in  $[a, b]$ .

**OSSERVAZIONE.** Vale, più in generale, che

$$g_n(t) = \int_a^t f_n(s) ds \quad \text{converge a} \quad g(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

**DIMOSTRAZIONE.** In maniera analoga a come dimostrato precedentemente:

$$\left| \int_a^t f_n(s) ds - \int_a^t f(s) ds \right| \leq \int_a^t |f_n(s) - f(s)| ds \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt < \varepsilon. \quad \square$$

In generale, il teorema non vale sotto la sola ipotesi di convergenza puntuale.

**ESEMPIO.** Sia

$$f_n(t) = nte^{-nt^2}, \quad t \in [0, 1].$$

La funzione converge puntualmente su  $[0, 1]$  a  $f \equiv 0$  ma non converge uniformemente su  $[0, 1]$ , come già visto in (5.1). Osserviamo che

$$\lim_n \int_0^1 nte^{-nt^2} dt = \lim_n \left. -\frac{1}{2}e^{-nt^2} \right|_0^1 = \lim_n \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2}$$

mentre

$$\int_0^1 \lim_n f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

A differenza di quanto ci si potrebbe aspettare dati i risultati su limitatezza, continuità e integrabilità, la convergenza uniforme *non* è sufficiente per passare la derivabilità. Tuttavia, se a convergere uniformemente è la successione delle *derivate*, allora la funzione limite è derivabile, come ci mostra il seguente:

**TEOREMA 5.2.4. (DI DERIVABILITÀ PER SUCCESIONI).**

Sia  $f_n : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni derivabili in  $(a, b)$ . Supponiamo che:

1.  $f_n$  converga puntualmente almeno in un punto  $t_0$  di  $(a, b)$ ;
2. La successione delle derivate  $f'_n$  converga uniformemente su  $(a, b)$  ad una funzione  $g$ .

Allora  $f_n$  converge uniformemente su  $(a, b)$  a una funzione  $f$  derivabile in  $(a, b)$  e tale che  $f'(t) = g(t)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo prima che  $f_n$  converge uniformemente in  $(a, b)$ . Sia  $t \neq t_0$  e siano  $n, m \in \mathbb{N}$ . Per il teorema di Lagrange applicato alla funzione  $f_n - f_m$ ,  $\exists \xi$  compreso tra  $t_0$  e  $t$  - supponendo  $t > t_0$  - tale che

$$\frac{(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(t_0) - f_m(t_0))}{(t - t_0)} = f'_n(\xi) - f'_m(\xi).$$

Manipolando i termini abbiamo che

$$f_n(t) - f_m(t) = (f'_n(\xi) - f'_m(\xi))(t - t_0) + f_n(t_0) - f_m(t_0).$$

Studiamo ora la convergenza di  $f_n$  con il *criterio di Cauchy*. Usando la disuguaglianza triangolare,

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq |(f'_n(\xi) - f'_m(\xi))|(t - t_0)| + |f_n(t_0) - f_m(t_0)|,$$

ma  $f'_n$  converge uniformemente,  $f_n$  converge puntualmente in  $t_0$  e  $|(t - t_0)| \leq (b - a)$  è limitato, dunque

$$|(f'_n(\xi) - f'_m(\xi))|(t - t_0)| + |f_n(t_0) - f_m(t_0)| \leq \varepsilon$$

per  $n, m$  sufficientemente grandi. Dimostriamo ora che  $f'(t) = g(t)$ . Fissato  $h > 0$ , consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{f_n(t+h) - f_n(t)}^{g_n(t,h)}}{h}$$

e chiamiamo questa successione  $g_n(t, h)$ . Studiamo la convergenza di  $g_n(t, h)$  con il criterio di Cauchy. Si ha

$$g_n(t, h) - g_m(t, h) = \frac{1}{h} (f_n(t+h) - f_n(t) - f_m(t+h) + f_m(t)).$$

Applichiamo nuovamente il teorema di Lagrange sull'intervallo  $[t, t+h]$ . Quindi,  $\exists \eta$  tale che

$$g_n(t, h) - g_m(t, h) = \frac{1}{h} (f_n(t+h) - f_n(t) - (f_m(t+h) - f_m(t))) = f'_n(\eta) - f'_m(\eta)$$

La successione  $f'_n$  converge uniformemente per ipotesi, quindi, anche  $g_n(t, h)$ . Per concludere, studiamo il limite per  $h \rightarrow 0$  del rapporto incrementale delle  $f_n$  utilizzando il teorema di scambio dei limiti:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) = g(t). \quad \square$$

**COROLLARIO 5.2.2. (DERIVABILITÀ DEGLI ORDINI SUPERIORI PER SUCCESIONI).**

Sotto le ipotesi del teorema, se le funzioni  $f_n$  sono di classe  $C^1$  su  $(a, b)$ , allora  $f$  è  $C^1$  su  $(a, b)$ .  $\square$

Per dimostrarlo, è sufficiente osservare che se le  $f_n$  sono di classe  $C^1$ , allora la successione  $f'_n$  tende ad una funzione continua.



## 5.3 SERIE DI FUNZIONI

Data  $f_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ), vogliamo studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$$

In modo simile a come abbiamo fatto per le serie numeriche, a partire da  $f_n$  definiamo la successione delle *ridotte*  $n$ -esime

$$\begin{aligned} S_0(t) &= f_0(t) \\ S_1(t) &= f_0(t) + f_1(t) \\ S_2(t) &= f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) \\ &\vdots \\ S_n(t) &= \sum_{k=0}^n f_k(t) \end{aligned}$$

**DEFINIZIONE 5.3.1. (CONVERGENZA PUNTUALE).**

Si dice che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  **converge puntualmente** su  $S$  ad una funzione  $\sigma : S \longrightarrow \mathbb{K}$ , con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , se la successione  $\{S_n\}_n$  delle ridotte  $n$ -esime converge puntualmente a  $\sigma$  su  $S$ .

**DEFINIZIONE 5.3.2. (CONVERGENZA UNIFORME).**

Si dice che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  **converge uniformemente** su  $S$  se la successione  $\{S_n\}_n$  delle ridotte  $n$ -esime converge uniformemente a  $\sigma$  su  $S$ .

Come nel caso delle successioni di funzioni, se una serie converge uniformemente allora converge anche puntualmente.

## 5.3.1 Convergenza di una serie di funzioni

Come nel caso delle serie numeriche, dato che lavoriamo in uno spazio metrico completo è possibile formulare degli opportuni *criteri di Cauchy* per le serie di funzioni

**PROPOSIZIONE 5.3.1. (CRITERIO DI CAUCHY PER SERIE - CONVERGENZA PUNTUALE).**

Una serie di funzioni  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  converge puntualmente su  $S$  se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \forall t \in S \exists N = N(\varepsilon) : \forall p \geq N, \forall q \geq 0 \quad |f_p(t) + \dots + f_{p+q}(t)| < \varepsilon \quad (5.3)$$

□

**PROPOSIZIONE 5.3.2. (CRITERIO DI CAUCHY PER SERIE - CONVERGENZA UNIFORME).**

Una serie di funzioni  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  converge uniformemente su  $S$  se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall p \geq N, \forall q \geq 0 \quad |f_p(t) + \dots + f_{p+q}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in S. \quad (5.4)$$

□

Se esiste un  $\varepsilon$  tale che valga (5.4) per ogni  $t$ , allora con lo stesso  $\varepsilon$  varrà anche (5.3), fissato  $t$ , confermando che la convergenza uniforme di una serie implica quella puntuale.

Valgono tutti i criteri per la convergenza delle serie numeriche - anche se generalmente sono utili per dimostrare soltanto la convergenza puntuale di una serie di funzioni - e anche in questo caso è utile la condizione necessaria per la convergenza:

- puntuale di una serie:  $\lim_n f_n = 0$ ;
- uniforme di una serie:  $\lim_n \sup_S |f_n| = 0$ .

Seguendo il parallelismo con le serie numeriche, introduciamo ora il concetto di *convergenza assoluta* per una serie.

**DEFINIZIONE 5.3.3. (CONVERGENZA ASSOLUTA).**

Si dice che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  **converge assolutamente** su  $S$  se  $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$  converge puntualmente su  $S$ .

Ovviamente, la convergenza assoluta implica quella puntuale, ma non dà informazioni riguardo la convergenza uniforme. Abbiamo quindi bisogno di criteri per stabilire quando una serie converge in uniformemente. Anche se fornisce una condizione solo sufficiente e non necessaria, risulta molto utile il seguente:

**PROPOSIZIONE 5.3.3. (CRITERIO DI WEIERSTRASS).**

Data una serie di funzioni  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  a valori reali o complessi, se esiste una successione di numeri reali positivi  $c_n$  tali che:

1.  $|f_n(t)| < c_n$  definitivamente;
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  converge;

allora  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  converge uniformemente in  $S$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  converge, allora vale il *criterio di Cauchy*<sup>a</sup>:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall p \geq N, \forall q \geq 0 \quad c_p + \dots + c_{p+q} < \varepsilon.$$

Per la disuguaglianza triangolare,

$$|f_p(t) + \dots + f_{p+q}(t)| \leq |f_p(t)| + \dots + |f_{p+q}(t)| \leq c_p + \dots + c_{p+q} < \varepsilon,$$

dunque  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  converge uniformemente. □

<sup>a</sup>Possiamo togliere il valore assoluto poiché i termini sono tutti positivi.

**ESEMPIO.** Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dato che  $|\sin(nt)| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$  allora vale la maggiorazione

$$\left| \frac{\sin nt}{n^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Dato che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  converge, allora  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^{\frac{3}{2}}}$  converge uniformemente.

**OSSERVAZIONE.** In generale, la successione  $c_n = \sup_{t \in S} |f_n(t)|$  è la più piccola che possiamo usare per verificare il *criterio di Weierstrass*.

**DEFINIZIONE 5.3.4. (CONVERGENZA TOTALE).**

Una serie di funzioni che soddisfa le ipotesi del *criterio di Weierstrass* è detta **totalmente convergente**.

**OSSERVAZIONE.** Alcuni autori definiscono “totalmente convergente” una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_S |f_n|$  è convergente. La definizione 5.3.4 e quella appena proposta sono equivalenti: se una serie è totalmente convergente nel senso di 5.3.4 allora esiste una successione di reali positivi  $\{c_n\}$  tale che  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  sia convergente che maggiora ogni termine della successione  $\{f_n\}$ , ma allora in particolare  $\{c_n\}$  maggiorerà anche  $\sup_S |f_n|$ . Se invece si ha la convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_S |f_n|$  allora si può scegliere come  $c_n = \sup_S |f_n|$  e applicare il *criterio di Weierstrass*.

Abbiamo dimostrato che una serie totalmente convergente converge uniformemente, ma il contrario non è vero in generale, come avevamo anticipato.

**ESEMPIO.** Sia  $f_n : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  con

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} & t \in [n, n+1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Gli intervalli  $[n, n+1)$  sono disgiunti tra di loro, quindi la serie converge puntualmente alla funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [1, 2) \\ \frac{1}{2} & t \in [2, 3) \\ \frac{1}{3} & t \in [3, 4) \\ \vdots & \\ \frac{1}{n} & t \in [n, n+1) \end{cases}.$$

Inoltre, la convergenza è uniforme in quanto

$$\sup_{[1, +\infty)} \left| f(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) \right| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Tuttavia, non converge totalmente, in quanto la successione

$$\sup_{[1, +\infty)} |f_n(t)| = \frac{1}{n}$$

è la più piccola che maggiora  $f_n$ , ma  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

Mostriamo ora con un controesempio che la convergenza assoluta e quella uniforme non sono legate.

**ESEMPIO.** Sia la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dalla teoria delle successioni numeriche, la serie converge puntualmente ma non assolutamente, perché fissato  $x^2$ , allora  $\frac{1}{n+x^2} \sim \frac{1}{n}$ . Dimostriamo ora la convergenza uniforme.

Per il *criterio di Leibniz*, una serie della forma  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ , con  $b_n$  monotona decrescente a valori positivi e  $b_n \rightarrow 0$ , allora la serie converge e, chiamata  $S$  la somma della serie, vale

$$\left| S - \sum_{m=0}^n S_m \right| \leq b_{n+1}.$$

Quindi,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| S(x) - \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m+x^2} \right| \leq \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Dato che  $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$  indipendentemente da  $x$ , la serie converge uniformemente.

### 5.3.2 Teoremi di scambio per le serie

Introduciamo ora dei teoremi di scambio per le serie di funzioni analoghi a quelli per le successioni di funzioni. Come già affermato, questi valgono su  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , ove non diversamente specificato.

#### TEOREMA 5.3.1. (SCAMBIO TRA LIMITE E SERIE).

Sia  $f_n : S \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  una successione di funzioni. Supponiamo che  $t_0$  sia un punto di accumulazione per  $S$  e che

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  converga uniformemente su  $S$  e abbia somma  $F(t)$ ;
2. esistano finiti  $\lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) = l_n$ .

Allora  $\sum_{n=0}^{\infty} l_n$  converge e detta  $L$  la sua somma si ha che  $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L$ . Equivalentemente,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \quad \square$$

#### COROLLARIO 5.3.1. (DI CONVERGENZA PER SERIE).

Se  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  è una serie di funzioni continue su  $S$  e convergente uniformemente su  $S$  con somma  $F(t)$  allora  $F$  è continua su  $S$ . □

Conseguenza del teorema di passaggio al limite sotto il segno d'integrale è il seguente:

#### TEOREMA 5.3.2. (SCAMBIO FRA INTEGRALE E SERIE).

Sia  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  una successione di funzioni continue su  $[a, b]$  e sia  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$  convergente uniformemente su  $[a, b]$  con somma  $F(t)$ . Allora la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt$  converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b F(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt. \quad \square$$

#### TEOREMA 5.3.3. (DERIVABILITÀ TERMINE A TERMINE).

Sia  $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni. Se le  $f_n$  sono derivabili su  $(a, b)$  e

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t)$  è uniformemente convergente su  $(a, b)$  con somma  $G(t)$ ;
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$  converge almeno in un punto  $t_0 \in (a, b)$ ;

allora  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$  converge uniformemente su  $(a, b)$  e detta  $F(t)$  la sua somma si ha che  $F(t)$  è derivabile

in  $(a, b)$  e

$$F'(t) = G(t), \quad \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t). \quad \square$$

**COROLLARIO 5.3.2. (DERIVABILITÀ DEGLI ORDINI SUPERIORI PER SERIE).**

Se le  $f_n$  sono di classe  $C^k(a, b)$  e le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t), \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t), \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(2)}(t), \quad \dots, \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(t)$$

convergono uniformemente su  $(a, b)$  e hanno somme  $F, G_1, \dots, G_k$  allora  $F$  è di classe  $C^k$  su  $(a, b)$  e  $F^{(h)}(t) = G_h(t) \forall h = 1, \dots, k, \forall t \in (a, b)$ .  $\square$

**COROLLARIO 5.3.3. (DERIVABILITÀ PER SERIE A DOMINIO VETTORIALE).**

Siano  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $f_n \in C^1(\Omega)$ ; se le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} f_n(t), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_2} f_n(t), \quad \dots, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_m} f_n(t)$$

convergono uniformemente su  $\Omega$  e hanno somme  $F, H_1, \dots, H_m$  allora  $F \in C^1(\Omega)$  e  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = H_i \forall i = 1, \dots, m$ .  $\square$

**ESEMPIO.** La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad t \in (-1, 1)$$

converge puntualmente se e solo se  $|t| < 1$  e in tal caso la somma è  $\frac{1}{1-t}$ ; essendo la convergenza dipendente soltanto dal modulo di  $t$ , converge anche assolutamente su  $(-1, 1)$ . Cosa possiamo dire sulla convergenza uniforme? Se la serie convergesse uniformemente, potremmo applicare il teorema di scambio tra limite e serie e avremmo

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} t^n = 1 = l_n,$$

che implica la convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ , il che è assurdo. Si può fare un ragionamento analogo per l'estremo inferiore,

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} t^n = (-1)^n = l_n$$

ma poiché la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  non converge, il che abbiamo ancora una volta un assurdo. La serie data converge assolutamente, ma non uniformemente.

**ESEMPIO.**

Studiamo ora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n} (-1)^n \quad x \in \mathbb{R}.$$

Partiamo dalla convergenza puntuale:

- $x > 0$ .  $\left| \frac{e^{nx}}{n} \right| \rightarrow \infty$  e quindi non c'è convergenza;
- $x = 0$ .  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  converge puntualmente ma non assolutamente per Leibniz;
- $x < 0$ .  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n} (-1)^n$  converge assolutamente per il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{e^{nx}}{n}} = \frac{e^x}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow e^x \rightarrow 0$$

Si ha quindi convergenza assoluta su  $(-\infty, 0)$  e puntuale su  $(-\infty, 0]$ . Passiamo alla convergenza uniforme; chiamata  $\sigma$  la funzione somma, per il criterio di Leibniz

$$\sup_{x \in (-\infty, 0]} \left| \sigma(x) - \sum_{n=0}^N \frac{e^{nx}}{n} (-1)^n \right| \leq \frac{e^{(N+1)x}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1} \rightarrow 0$$

La serie è pertanto uniformemente convergente.

**ESEMPIO.** Studiamo la convergenza puntuale, assoluta e uniforme di

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 3n^4} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fissato  $x$ , si ottiene facilmente che

$$\left| \frac{x}{x^4 + 3n^4} \right| = \frac{|x|}{x^4 + 3n^4} \leq \frac{1}{3n^4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

dimostrando la convergenza assoluta della serie su tutto  $\mathbb{R}$ . Usiamo ora il *criterio di Weierstrass* per mostrare la convergenza uniforme della serie. Osserviamo che le  $f_n$  sono funzioni continue su  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n = 0$  e sono funzioni dispari, quindi  $|f_n|$  è pari: possiamo studiare il carattere delle  $f_n$  su  $[0, +\infty)$  senza considerarne il modulo:

$$f'_n(x) = \frac{x^4 + 3n^4 - x(4x^3)}{(x^4 + 3n^4)^2} = \frac{3n^4 - 3x^3}{(x^4 + 3n^4)^2}.$$

Si ha

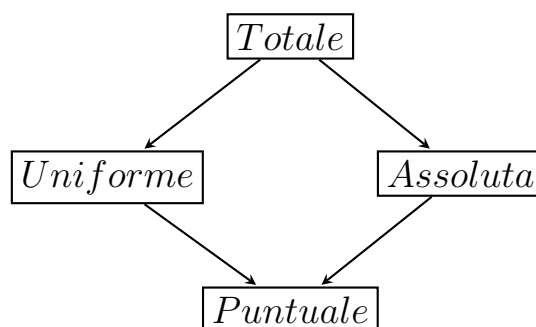
$$f'_n(x) \geq 0 \iff n^4 - x^4 \leq 0 \iff 0 \leq x \leq n,$$

quindi  $n$  è il punto di massimo della funzione. Poniamo allora  $c_n = f_n(n)$  e mostriamo la convergenza totale della serie:

$$c_n = \sup_{x \in [0, +\infty)} \left( \frac{x}{x^4 + 3n^4} \right) = f_n(n) = \frac{n}{4n^4} = \frac{1}{4n^3}.$$

Poiché la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^3}$  converge, abbiamo la convergenza totale della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  e quindi anche quella uniforme.

Concludiamo la trattazione sulle serie con un diagramma riassuntivo delle relazioni tra i vari tipi di convergenza.



#### 5.4 SERIE DI POTENZE

Le serie di potenze sono particolari serie di funzioni che trovano il loro dominio naturale nel campo complesso.

##### DEFINIZIONE 5.4.I. (SERIE DI POTENZE).

Una **serie di potenze** è una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n(z - z_0)^n}_{f_n(z)}, \quad (5.5)$$

con  $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$  fissati,  $z \in \mathbb{C}$ . Chiamiamo  $a_n$  **coefficienti** della serie e  $z_0$  **centro** della serie.

Osserviamo che con un cambio di variabile  $w = z - z_0$  è sempre possibile ricondursi al caso  $z_0 = 0$ . Per semplicità enunceremo teoremi e definizioni per serie di potenze centrate nell'origine, con la consapevolezza che possiamo ricondurci ad un centro arbitrario con un opportuno cambio di variabile.

##### 5.4.1 Raggio di convergenza

Dove converge puntualmente una serie di potenze? Prima di tutto, osserviamo che tutte le serie di potenze convergono in  $z = z_0$ , indipendentemente dai coefficienti, quindi esiste sempre almeno un punto in cui la serie converge. Vediamo ora in quali altri punti la serie può convergere:

##### PROPOSIZIONE 5.4.I. (CONDIZIONE DI CONVERGENZA DELLE SERIE DI POTENZE).

Se una serie di potenze converge in un punto  $w \in \mathbb{C}$ , allora converge assolutamente in ogni  $z$  tale che  $|z| < |w|$ .

##### DIMOSTRAZIONE.

Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$  converge allora, dalla condizione necessaria per la convergenza, sappiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n w^n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| |w|^n = 0 \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che se } n > N \text{ allora } |a_n| |w|^n < 1$$

Sia  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $|z| < |w|$ . Allora

$$|a_n z^n| = \left| a_n w^n \frac{z^n}{w^n} \right| = |a_n w^n| \left| \frac{z^n}{w^n} \right| = |a_n| |w|^n \left( \frac{|z|}{|w|} \right)^n < \left( \frac{|z|}{|w|} \right)^n < 1 \text{ se } m > N$$

Quindi la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{|w|}\right)^n$  converge, essendo una serie geometrica di ragione di modulo minore di uno, determinando la convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE.** La Proposizione 5.4.1 risulta molto utile anche in negativo: se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$  non converge in  $w_0$ , allora non convergerà in nessun punto  $z$  tale che  $|z| > |w_0|$ . Pertanto, l'insieme di convergenza di una serie di potenze è un **cerchio** sul piano di Argand-Gauss.

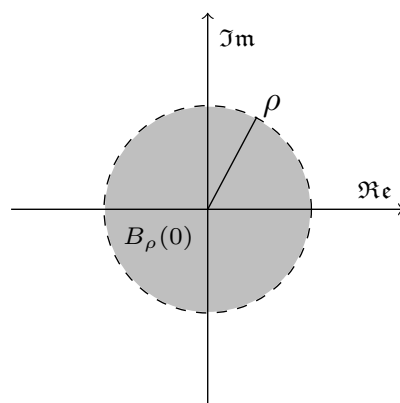
**DEFINIZIONE 5.4.2. (RAGGIO E CERCHIO DI CONVERGENZA).**

Sia  $A$  l'insieme dei punti in cui una serie di potenze converge e sia  $B = \{|z|: z \in A\}$ . Il **raggio di convergenza** della serie di potenze è definito come  $\rho = \sup(B)$ . Esso può essere:

- $\rho = 0$ ; in tal caso la serie converge *solo* per  $z = 0$ .
- $\rho = +\infty$ ; in tal caso la serie converge *per ogni*  $z \in \mathbb{C}$ .
- $0 < \rho < +\infty$ ; in tal caso si ha convergenza assoluta per ogni  $z$  con  $|z| < \rho$ , non converge nemmeno puntualmente per ogni  $z$  con  $|z| > \rho$ , mentre a priori non abbiamo informazioni sulla convergenza sul **bordo** del cerchio. L'insieme di convergenza, dalle osservazioni fatte, risulta essere un **cerchio aperto**

$$B_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$$

a cui si aggiungono eventualmente altri punti di convergenza sul bordo (tutti, nessuno o solo alcuni).



5.4.1.1 Calcolo del raggio di convergenza

Vediamo alcuni metodi per ricavare il raggio di convergenza di una serie di potenze:

**TEOREMA 5.4.1. (DI CAUCHY-HADAMARD).**

Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una serie di potenze complesse e sia  $\rho$  il suo raggio di convergenza. Sia inoltre

$$\ell = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Allora:

1. Se  $0 < \ell < +\infty$ , allora  $\rho = \frac{1}{\ell}$ ;
2. Se  $\ell = +\infty$ , allora  $\rho = 0$ ;
3. Se  $\ell = 0$ , allora  $\rho = +\infty$ .



Con un abuso di notazione, possiamo scrivere più semplicemente

$$\rho = \frac{1}{\ell}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo solamente il punto 1., essendo i punti 2. e 3. conseguenze immediate di esso. Ricordiamo che, data una successione  $b_n$  e dato  $\ell = \limsup_n b_n$  si ha, per definizione

1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N: n > N \Rightarrow b_n < \ell + \varepsilon;$
2.  $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} \exists m > n: a_m > \ell - \varepsilon.$

Sia ora  $|z| < \frac{1}{\ell}$ . Poiché  $\ell = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ , allora:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: n > N \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \ell + \varepsilon \Rightarrow |a_n| < (\ell + \varepsilon)^n.$$

Dato che  $|z| < \frac{1}{\ell}$ , allora  $|z|\ell < 1$ , dunque

$$\exists \varepsilon > 0: \underbrace{(\ell + \varepsilon)|z|}_{=q} < 1.$$

Preso questo  $\varepsilon$ , consideriamo

$$|a_n z^n| = |a_n| |z|^n < (\ell + \varepsilon)^n |z|^n = ((\ell + \varepsilon)|z|)^n = q^n.$$

Poiché  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  converge in quanto serie geometrica di ragione minore di 1, anche  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$  converge. Sia ora  $|z| > \frac{1}{\ell}$ , o equivalentemente  $|z|\ell > 1$ ; allora

$$\exists \varepsilon > 0: (\ell - \varepsilon)|z| > 1.$$

Usando la seconda proprietà del limite superiore, esistono infiniti termini  $a_n$  tali che

$$|a_n z^n| = |a_n| |z|^n > (\ell - \varepsilon)^n |z|^n = ((\ell - \varepsilon)|z|)^n > 1,$$

dunque la successione  $a_n z^n$  non può tendere a 0 e quindi per il criterio di Cauchy la serie non converge in  $z$ .  $\square$

Poiché la determinazione del  $\limsup$  può essere ostico, una condizione sufficiente (ma non necessaria!) più facile per determinare il raggio di convergenza in molti casi è il seguente criterio.

**PROPOSIZIONE 5.4.2. (CRITERIO DI D'ALEMBERT O DEL RAPPORTO).**

Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $\rho$  e sia

$$\ell = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Allora  $\rho = \frac{1}{\ell}$ .  $\square$

**ATTENZIONE!** Questa è una condizione più debole di quella del teorema di Cauchy-Hadamard: infatti, non è detto che il limite del rapporto sia ben definito!

## 5.4.2 Convergenza uniforme

Quanto detto finora riguarda la convergenza assoluta e quella puntuale. Studiamo adesso come si comporta una serie di potenze rispetto alla *convergenza uniforme*.

**TEOREMA 5.4.2. (CONVERGENZA UNIFORME DI UNA SERIE DI POTENZE).**

Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $\rho > 0$ . Allora,  $\forall r \in (0, \rho)$ , la serie converge totalmente - e quindi anche uniformemente - nella palla chiusa  $\overline{B_r(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ .

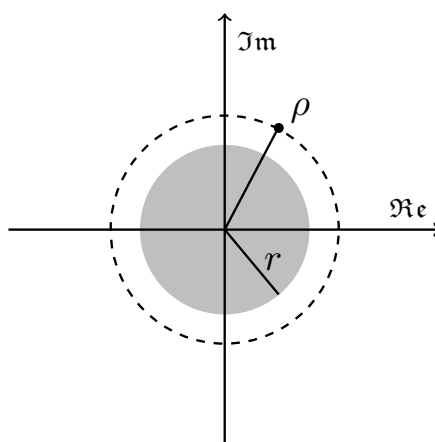
**DIMOSTRAZIONE.** Presa  $0 < r < \rho$ , per definizione di raggio di convergenza, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

converge. Inoltre, possiamo definire una successione  $\{c_n\}$  nel seguente modo:

$$|z| < r \Rightarrow |a_n z^n| \leq |a_n| |z|^n \leq |a_n| r^n = c_n.$$

La successione  $c_n$  maggiora  $|a_n z^n|$  e la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  converge, come abbiamo visto, dunque per il *criterio di Weierstrass*  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$  converge uniformemente.  $\square$



Vediamo ora un paio di esempi di studio della convergenza di una serie di potenze.

**ESEMPLI.**

- Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad z \in \mathbb{C}$$

la serie geometrica di ragione complessa, dunque con  $a_n \equiv 1$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow \rho = 1.$$

Si può inoltre dimostrare che la somma della serie è uguale a  $\frac{1}{1-z}$ , come nel caso dei numeri reali.

- Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Per la proposizione 5.4.2 vista precedentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

dunque la serie converge su tutto  $\mathbb{C}$ .

**OSSERVAZIONE.** Più in generale, per le serie di centro  $z_0$ , il cerchio di convergenza sarà un cerchio di raggio  $\rho$  e centro  $z_0$ .

**PROPOSIZIONE 5.4.3. (CONTINUITÀ DELLA SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE).**

Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una serie di potenze con raggio  $\rho > 0$ . Allora la funzione somma  $f(z)$  è continua nella palla aperta  $B_\rho(0)$ .

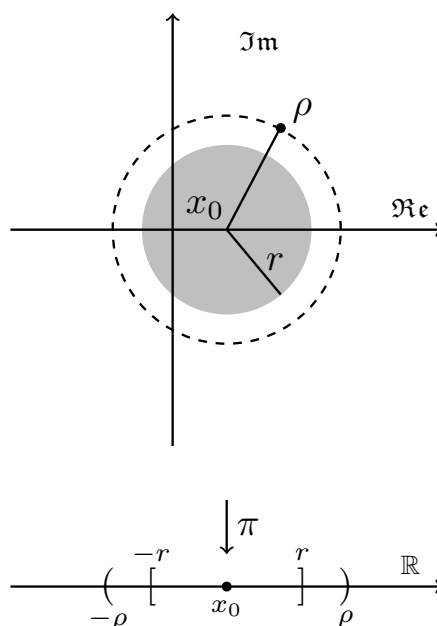
**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $w \in B_\rho(0)$ . Allora  $\exists r > 0$  tale che  $|w| \leq r < \rho$ . Poiché le funzioni  $a_n z^n$  sono continue e poiché  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge uniformemente su  $\overline{B_r(0)}$ , allora  $f(z)$  è continua in  $B_r(0)$ . Per l'arbitrarietà di  $w$  la funzione  $f(z)$  è continua in  $B_\rho(0)$ .  $\square$

### 5.4.3 Serie di potenze reali

In questo paragrafo ci concentriamo sulle serie di potenze *reali*, quindi della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_n, x_0 \in \mathbb{R}, \quad x \in A \subseteq \mathbb{R}$$

Possiamo vedere queste serie come restrizione in  $\mathbb{R}$  delle serie di potenze complesse. I cerchi di convergenza diventano quindi *intervalli* della forma  $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ .



Ci è noto che la convergenza uniforme della serie di potenze è garantita su intervalli chiusi contenuti strettamente nell'intervallo di convergenza. Se c'è qualche tipo di convergenza in un punto del bordo, possiamo estendere la convergenza uniforme ad essi con il

**TEOREMA 5.4.3. (DI ABEL PER SERIE DI POTENZE REALI).**

Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  con  $a_n, x \in \mathbb{R}$  una serie di potenze reali con raggio  $\rho > 0$ . Se la serie converge in  $x_0 + \rho$ , allora la serie converge uniformemente su  $[x_0 - r, x_0 + \rho]$ ,  $\forall r \in (0, \rho)$ . Analogamente, se la serie converge in  $x_0 - \rho$ , allora la serie converge uniformemente su  $[x_0 - \rho, x_0 + r]$ ,  $\forall r \in (0, \rho)$ .  $\square$

**ESEMPIO.** Sia la serie reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{n^2+1} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Studiamo il raggio di convergenza  $\rho$ :

$$a_n = \frac{ne^{-n}}{n^2+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{ne^{-n}}{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1} \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2+1}} = e^{-1} \Rightarrow \rho = e$$

Sappiamo già che la serie converge uniformemente negli intervalli  $(-r, r)$ , con  $r \in (0, e)$ . Usiamo il *teorema di Abel* per capire cosa succede agli estremi dell'intervallo. Sia  $x = e$ . Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{n^2+1} e^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge, essendo la *serie armonica*. Sia ora  $x = -e$ ; allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{n^2+1} (-e)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ne^{-n}}{n^2+1} e^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1},$$

che converge per il *criterio di Leibniz*. Dunque la serie converge uniformemente in tutti gli intervalli della forma  $[-e, r]$ , con  $r \in (0, e)$ .

## 5.4.4 Serie derivata

**DEFINIZIONE 5.4.3. (SERIE DERIVATA).**

Data  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  serie di potenze reali, si dice **serie derivata** la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

o in maniera equivalente,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m.$$

**OSSERVAZIONE.** La serie derivata è ancora una serie di potenze con lo *stesso raggio di convergenza*  $\rho$ . Infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

e si ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dunque,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  convergono entrambe puntualmente su  $(-\rho, \rho)$  e uni-

formemente su ogni intervallo  $(-r, r)$  con  $r \in (0, \rho)$ . Per il *Teorema di derivabilità termine a termine*, segue che la funzione somma  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  è derivabile su  $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$  e  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ . Iterando questo procedimento, otteniamo che la somma di una serie di potenze è derivabile infinite volte su  $(-\rho, \rho)$  e

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho).$$

Poiché tutti i termini della serie si annullano in  $x_0$  eccetto quello  $k$ -esimo, essendo  $(x-x_0)^{n-k} = (x-x_0)^0 = 1$ , sostituendo  $x_0$  al posto di  $x$  si ottiene

$$f^{(k)}(x_0) = a_k \underbrace{k(k-1) \dots 1}_{k!} = a_k k! \implies a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Esistono risultati analoghi per le serie complesse:

**DEFINIZIONE 5.4.4. (FUNZIONE OLOMORFA).**

Una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  aperto, si dice **derivabile in senso complesso o olomorfa** in  $w \in A$  se esiste finito in  $\mathbb{C}$  il limite

$$f'(w) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h}$$

Come nel caso reale, si dimostra che se  $f$  è la somma di una serie di potenze complesse  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$  con raggio  $\rho > 0$  allora  $f$  è derivabile in senso complesso infinite volte su  $B_\rho(z_0)$  e vale:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) a_n (z-z_0)^{n-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall z_0 \in B_\rho(z_0),$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall z_0 \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

**5.4.4.I Digressione: corrispondenza tra  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$**

Si possono considerare le funzioni di variabile complessa come funzioni da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$ . Pertanto ha senso definire:

**DEFINIZIONE 5.4.5. (RELAZIONI DI CAUCHY-RIEMANN).**

Data  $f = u + iv$ , con  $u, v : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  si dicono **relazioni di Cauchy-Riemann** le seguenti:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (5.7)$$

Le relazioni (5.7) permettono di correlare la nozione di differenziabilità in  $\mathbb{R}^2$  e quella di funzione olomorfa. Vale infatti:

**PROPOSIZIONE 5.4.4. (CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI OLOMORFE).**

$f = u + iv$  come funzione in  $\mathbb{C}$  è olomorfa in  $z_0 = x_0 + iy_0$  se e solo se  $f = (u, v)$  come funzione in  $\mathbb{R}^2$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  e valgono (5.7).  $\square$

## 5.4.5 Convergenza uniforme di serie di potenze complesse

**TEOREMA 5.4.4. (DI ABEL PER SERIE DI POTENZE COMPLESSE).**

Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  con  $a_n, z \in \mathbb{C}$  una serie di potenze complesse con raggio  $\rho > 0$ . Se la serie converge in un punto  $\rho e^{i\theta_0} \in \partial B_\rho(z_0)$  per un certo  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ , allora la serie converge uniformemente sul raggio che collega  $z_0$  con  $\rho e^{i\theta_0}$ .  $\square$

Vale anche il seguente risultato, molto potente ma che richiede la *convergenza assoluta* in almeno un punto del bordo:

**TEOREMA 5.4.5. (CONVERGENZA UNIFORME DATA CONVERGENZA ASSOLUTA SUL BORDO).**

Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  con  $a_n, z \in \mathbb{C}$  una serie di potenze complesse con raggio  $\rho > 0$ . Se la serie converge assolutamente in un punto  $\rho e^{i\theta_0} \in \partial B_\rho(z_0)$  per un certo  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ , allora la serie converge totalmente su tutto  $\overline{B_\rho(z_0)}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $z \in \overline{B_\rho(z_0)}$ . Allora

$$|a_n z^n| = |a_n| |z|^n \leq |a_n| \rho^n.$$

Poiché la serie converge assolutamente in  $\rho e^{i\theta_0}$ , si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \rho^n e^{ni\theta_0}| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n \text{ converge.}$$

Quindi, per il *criterio di Weierstrass* la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n$  converge.  $\square$

## 5.4.6 Serie di Taylor e funzioni analitiche

Finora abbiamo studiato la convergenza di serie di potenze a determinate funzioni. Ci proponiamo adesso di ribaltare il problema: quando possiamo esprimere una funzione  $f \in C^\infty(I)$ ,  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  come una serie di potenze di centro  $x_0$ ? Se ciò è possibile deve valere (5.6) per ogni  $a_n$ . Questo fatto rende naturale la seguente:

**DEFINIZIONE 5.4.6. (SERIE DI TAYLOR).**

Si dice **serie di Taylor** di  $f$  di centro  $x_0$  la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r) \quad (5.8)$$

Se  $x_0 = 0$  si parla di **serie di Maclaurin**.

**OSSERVAZIONE.**

La definizione (5.4.6) è dovuta al fatto che la ridotta  $n$ -esima della serie di Taylor corrisponde al polinomio di Taylor di grado  $n$  e centro  $x_0$ .

Purtroppo, non sempre la serie (5.8) converge su  $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$  e ha per somma  $f$ .

**ESEMPIO.** Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La funzione  $f$  è continua in 0 e si verifica per induzione che  $f$  è derivabile infinite volte, con derivate della forma

$$f^{(k)} = p\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad p \text{ polinomio}$$

che tendono tutte a 0 per  $x \rightarrow 0$ . Quindi  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  e ha tutte le derivate nulle nell'origine, quindi la serie di Maclaurin converge in tutto  $\mathbb{R}$  ed è costantemente 0, e dunque non coincide con  $f$ .

Poiché non tutte le funzioni  $C^\infty$  si possono scrivere come la loro serie di Taylor, introduciamo la classe di funzioni che soddisfano ciò: le *funzioni analitiche*.

**DEFINIZIONE 5.4.7. (FUNZIONE ANALITICA).**

Sia  $f \in C^\infty(I)$ . Si dice che  $f$  è **analitica in**  $x_0$  se  $\exists r > 0$  tale che:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

Si dice che  $f$  è analitica su  $J \subseteq I$  se è analitica in ogni punto di  $J$ .

**DIGRESSIONE.** In campo reale, le funzioni *analitiche* in un insieme  $U$  sono solo un piccolo sottoinsieme delle funzioni  $C^\infty(U)$ , che a loro volta sono un sottoinsieme stretto delle funzioni  $C^1(U)$ ,  $C^2(U)$ , ..., a loro volta contenute strettamente nelle funzioni derivabili  $\mathcal{D}(U)$ , a loro volta contenute strettamente nelle funzioni continue  $\mathcal{C}(U)$ . In campo complesso abbiamo una sorpresa: infatti, se la funzione è derivabile anche una sola volta, lo è infinitamente con continuità e sono anche analitiche!

$$\mathcal{D}(U) = \mathcal{C}^1(U) = \dots = \mathcal{C}^\infty(U) = \mathcal{A}(U)$$

Questa è una conseguenza del fatto che  $\mathbb{C}$  ha la struttura di campo come  $\mathbb{R}$ , ma allo stesso tempo è uno spazio vettoriale di dimensione 2 su  $\mathbb{R}$  stesso.

Bisogna quindi capire sotto quali ipotesi ulteriori una funzione di classe  $C^\infty$  è analitica, ossia si può scrivere come somma della sua serie di Taylor: in particolare, dobbiamo verificare che la serie innanzi tutto converga e che converga alla  $f$  voluta (il che non è successo nell'esempio precedente). Cerchiamo a tal scopo una *condizione sufficiente*.

**TEOREMA 5.4.6. (CONDIZIONE SUFFICIENTE DI ANALITICITÀ).**

Sia  $f \in C^\infty(x_0 - r, x_0 + r)$  per un certo  $r > 0$ . Supponiamo che esista  $M$  tale che:

$$\sup_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} |f^{(n)}(x)| \leq Mr^{-n}n! \quad (5.9)$$

definitivamente. Allora  $f$  è analitica in  $x_0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dobbiamo mostrare che

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| = |f(x) - T_{N,x_0}(x)| \rightarrow 0 \text{ per } N \rightarrow \infty, \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r). \quad (5.10)$$

Osserviamo che (5.10) è il resto del polinomio di Taylor che esprimiamo come resto di Lagrange: esiste  $c \in (x_0, x)$  tale che

$$|f(x) - T_{N,x_0}(x)| = \left| \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(c) (x - x_0)^{N+1} \right| = \frac{1}{(N+1)!} |f^{(N+1)}(c)| |x - x_0|^{N+1}.$$

Usando ora l'ipotesi (5.9) abbiamo  $f^{(N+1)}(c) \leq Mr^{-(N+1)}(N+1)!$  e quindi

$$\frac{1}{(N+1)!} |f^{(N+1)}(c)| |x - x_0|^{N+1} \leq M \left( \frac{x - x_0}{r} \right)^{N+1}.$$

Per concludere ricordiamo che  $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \Leftrightarrow |x - x_0| < r$ , dunque

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M \left( \frac{x - x_0}{r} \right)^{N+1} = 0. \quad \square$$

**OSSERVAZIONE.** Il teorema precedente vale in particolare se  $\exists M' > 0$  tale che

$$\sup_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} |f^{(n)}(x)| \leq M'. \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

#### 5.4.6.1 Esempi di funzioni analitiche

**Funzione esponenziale** Una ben funzione analitica nota è la **funzione esponenziale**:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

**Funzioni iperboliche** Grazie all'analiticità della funzione esponenziale possiamo dimostrare quella delle **funzioni iperboliche**  $\cosh x$  e  $\sinh x$ . Sostituendo  $-x$  a  $x$  in (5.11) si ottiene la serie di Taylor di  $e^{-x}$ :

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.12)$$

Sommando (5.11) e (5.12) e dividendo il risultato per due si ottiene la serie di Taylor di  $\cosh x$ :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} \right) x^n.$$

Osservando che i termini dispari si annullano e i termini pari hanno 2 a numeratore otteniamo

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e con manipolazioni simili si ottiene

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



**Potenze binomiali** Le funzioni  $(1+x)^\alpha$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$  sono analitiche:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in (-1, 1)$$

Tale serie è detta **serie binomiale**: infatti, se  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\binom{\alpha}{n}$  coincide con lo sviluppo del *binomio di Newton*; se  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'espressione  $\binom{\alpha}{n}$  si generalizza nel seguente modo:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

È chiaro che se  $\alpha \in \mathbb{N}$  il binomiale coincide con quello generalizzato.

**Logaritmo** La somma della serie geometrica è per ovvi motivi analitica in  $(-1, 1)$ , essendo peraltro un caso particolare della serie binomiale con  $\alpha = -1$  e  $-x$  al posto di  $x$ .

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in (-1, 1). \quad (5.13)$$

Integrando (5.13) si ottiene

$$-\log(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Dunque il logaritmo è analitico in  $(-1, 1)$ , con

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

**Arcoseno** Se  $x \in (-1, 1)$  allora  $x^2 \in [0, 1) \subset (-1, 1)$ ; possiamo considerare la serie binomiale con  $\alpha = -\frac{1}{2}$  e  $-x^2$  al posto di  $x$ .

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Integrando, abbiamo si ottiene la serie di Taylor di  $\arcsin x$ .

**Arcotangente** Se  $x \in (-1, 1)$  allora  $x^2 \in [0, 1)$  e  $-x^2 \in (-1, 0] \subset (-1, 1)$ ; possiamo considerare la serie binomiale con  $\alpha = -1$  e  $-x^2$  al posto di  $x$ :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n \quad x \in (-1, 1)$$

Integrando, abbiamo

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t^2)^n dt.$$

Fissato  $x \in (-1, 1)$  il *Teorema di Abel* garantisce la convergenza uniforme in  $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ , legittimando lo scambio tra serie e integrale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x (t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x \quad \forall x \in (-1, 1). \quad (5.14)$$

Abbiamo così dimostrato l'analiticità della funzione  $\arctan x$ .

**OSSERVAZIONE.** La serie (5.14) converge puntualmente anche in  $x = \pm 1$  per il *criterio di Leibniz* e quindi converge uniformemente per il *Teorema di Abel* su  $[-1, 1]$ . È quindi lecito utilizzare il *Teorema di scambio tra serie e limite*, come nel seguente esempio:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \frac{\pi}{4}.$$

## 5.5 † ESERCIZI SVOLTI SU SERIE COMPLESSE

Poiché può tornare utile, enunciamo senza dimostrazione il *criterio di convergenza di Dirichlet*; per una trattazione più approfondita si veda [AB97].

**PROPOSIZIONE 5.5.1. (CRITERIO DI DIRICHLET).**

Sia  $\{a_n\}_n$  una successione di numeri reali e  $\{b_n\}_n$  una successione di numeri complessi tali che:

1. la successione delle  $\{b_n\}_n$  somme parziali della serie  $\sum_n b_n$  è limitata;
2. la successione  $\{a_n\}_n$  è decrescente ed infinitesima.

Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

converge in  $\mathbb{C}$ . □

**ESERCIZIO (‡).** Trovare il raggio di convergenza e studiare la convergenza sul bordo di

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n + \log n} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5.15)$$

**SOLUZIONE.** Osserviamo per prima cosa che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n + \log n}{n + 1 + \log(n+1)} = 1 \implies \rho = 1.$$

Abbiamo pertanto convergenza puntuale nella palla aperta  $B_1(0)$  e uniforme in ogni palla chiusa  $\overline{B_r(0)}$  con  $0 < r < 1$ . Cosa succede sul bordo  $\partial B_1(0)$ ? Per prima cosa, possiamo osservare che i punti di  $\partial B_1(0)$ , formando una circonferenza sul piano complesso, possono essere espressi nella forma  $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , e quindi la serie,  $\forall z \in \partial B_1(0)$ , può essere scritta come

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n + \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n + \log n} + i \frac{\sin(n\theta)}{n + \log n}.$$

Poste

- $\{a_n\}_n = \frac{1}{n + \log n}$ ;
- $\{b_n\}_n = \cos(n\theta)$  per la prima frazione e  $\{b_n\}_n = i \sin(n\theta)$  per la seconda;

le serie convergono per il *criterio di Dirichlet* sul bordo tranne che in  $z = 1$ : infatti, in tal caso si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n + \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \log n}$$

e cadono dunque le ipotesi del *teorema di Dirichlet* -  $\{b_n\}_n = 1$  ed ovviamente  $\sum_{n=2}^{\infty} 1$  diverge. Si può mostrare, ad esempio usando il criterio di condensazione, che la serie diverge.

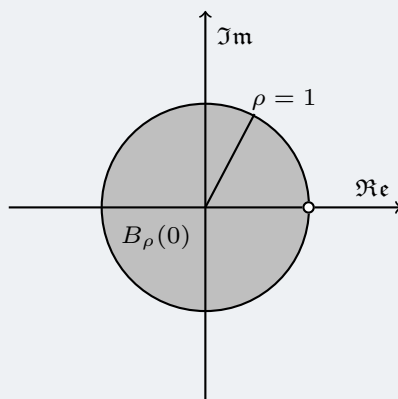


FIGURA 5.1 – Insieme di convergenza (5.15).

**ESERCIZIO (N° 14, FOGLIO 5).**

Trovare l'insieme di convergenza di

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{\log(n^2 + 1) - 2 \log n}{n - i\pi} (z + i\bar{z})^n \quad z \in \mathbb{C}.$$

**SOLUZIONE.** Poniamo  $\omega = z + i\bar{z}$  e calcoliamo  $|a_n| = \sqrt{\Re(a_n)^2 + \Im(a_n)^2}$ :

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{|\log(n^2 + 1) - 2 \log n|}{\sqrt{n^2 + \pi^2}} \\ &= \frac{|\log(1 + \frac{1}{n^2})|}{\sqrt{n^2 + \pi^2}} \rightarrow \frac{\frac{1}{n^2}}{n} = \frac{1}{n^3} \text{ se } n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

Si ha

$$\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = 1 \implies \rho = \frac{1}{\ell} = 1.$$

Inoltre, se  $|\omega| = 1$  la serie data, per quanto visto, è asintotica alla serie  $\sum \frac{1}{n^3}$  e converge: abbiamo convergenza per ogni  $|\omega| = |z + i\bar{z}| \leq 1$ . Cerchiamo di capire quali  $z \in \mathbb{C}$  soddisfano questa disequazione scrivendo  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ :

$$|\omega| = |z + i\bar{z}| \leq 1 \iff |x + iy + ix + y| \leq 1 \iff |(x + y) + i(x + y)| \leq 1.$$

Calcoliamo il modulo:

$$|(x + y) + i(x + y)| = \sqrt{(x + y)^2 + (x + y)^2} = \sqrt{2(x + y)^2} \leq 1.$$

Quindi  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x + y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , ossia

$$\begin{cases} x + y \leq \frac{1}{\sqrt{2}} & \implies y = \frac{1}{\sqrt{2}} - x; \\ x + y \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} & \implies y = -\frac{1}{\sqrt{2}} - x; \end{cases}$$

le equazioni rappresentano la “fascia” sul piano complesso compresa tra le due rette  $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} - x$  e  $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - x$ .



# III

## SPAZI METRICI



# SPAZI NORMATI E SPAZI METRICI

*“Questa sarà la vostra prima gita su un pianeta nuovo e strano, perciò copritevi bene, state caldi, e non mettetevi a giocare con nessun cattivo mostro dagli occhi d’insetto.”*

GUIDA GALATTICA PER GLI AUTOSTOPPISTI, *Eddie*.

**F**INO AD ORA, abbiamo studiato le proprietà degli insiemi numerici e delle funzioni come applicazioni tra questi insiemi. È utile generalizzare ed estendere le principali proprietà che abbiamo studiate a spazi metrici qualsiasi, come ad esempio gli spazi di funzioni, entrando nel campo dell’analisi funzionale.

## 6.1 SPAZI NORMATI

### DEFINIZIONE 6.1.1. (NORMA, SPAZIO NORMATO).

Sia  $E$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$ . Una funzione  $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$  è detta **norma** se soddisfa le proprietà seguenti:

1. **Positività della norma:**  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  e  $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in E$ ;
2. **Omogeneità assoluta:**  $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in E, \lambda \in \mathbb{K}$ ;
3. **Disuguaglianza triangolare:**  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ .

Uno spazio vettoriale munito di una norma è detto **spazio normato**.

### ESEMPI.

- Su  $\mathbb{R}^k$  possiamo considerare la norma euclidea:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left| \sum_{i=1}^k x_i^2 \right|^{\frac{1}{2}}.$$

- Altre norme interessanti, di cui si fa uso anche in analisi numerica, sono la **norma-1**



e la **norma-infinito**:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^k |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

**DEFINIZIONE 6.1.2. (NORMA- $p$ ).**

Si dice **norma- $p$**  la funzione

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^k |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se poniamo, nell'ordine  $p = 1$  e  $p = 2$  o facciamo tendere  $p \rightarrow \infty$  otteniamo la norma-1, la norma euclidea e la norma-infinito.

**PROPOSIZIONE 6.1.1. (EQUIVALENZA DELLE NORME- $p$ ).**

In  $\mathbb{R}^n$  vale:

$$n^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{x}\|_\infty \leq n^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Utilizziamo la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ponendo  $a_i = 1 \forall i$ ,  $b_i = x_i$ ,

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{x}\|_2;$$

otteniamo la prima disuguaglianza. Utilizzando la definizione di massimo, si ha

$$|x_i|^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^2 \quad \forall i = 1, \dots, n \implies \|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq n (\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^2) = n \|\mathbf{x}\|_\infty^2.$$

Estraendo la radice ad ambo i membri si ha la seconda disuguaglianza. Infine

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|\mathbf{x}\|_1$$

poiché banalmente il massimo è uno dei termini della sommatoria di addendi positivi di destra.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Se uno spazio vettoriale è munito di un *prodotto scalare*, allora esso induce una norma:

$$\|\mathbf{x}\| := \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

È facile verificare le prime due proprietà; per la terza si osserva che con la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

## 6.2 SPAZI DI FUNZIONI

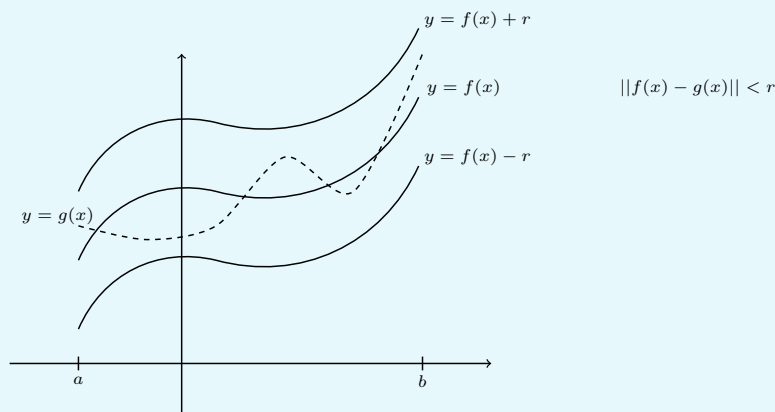
**DEFINIZIONE 6.2.I. (NORMA LAGRAGIANA).**

Sia  $E = C^0([a, b])$  lo spazio delle funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . Definiamo la **norma Lagrangiana** o **norma del sup** come

$$\|f\|_{C^0([a,b])} := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

dove la seconda uguaglianza è lecita per il *Teorema di Weierstrass*. Analogamente, se al posto di  $C^0([a, b])$  abbiamo  $C^k([a, b])$  possiamo definire

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^k([a,b])} &= \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| + \dots + \sup_{x \in [a,b]} |f^{(k)}(x)| \\ &= \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| + \dots + \max_{x \in [a,b]} |f^{(k)}(x)|. \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONI.**

- Se l'intervallo di definizione *non* è limitato è necessario richiedere la *limitatezza* della funzione.
- Se l'intervallo di definizione è aperto, vale soltanto l'espressione della norma con sup.

**ATTENZIONE!** La norma lagrangiana e la norma operatoriale *non* sono la stessa cosa!

Un altro tipo di norme sono le **norme- $p$  integrali**; per esempio:

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

È particolarmente interessante la norma-2 integrale

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

in quanto indotta dal prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

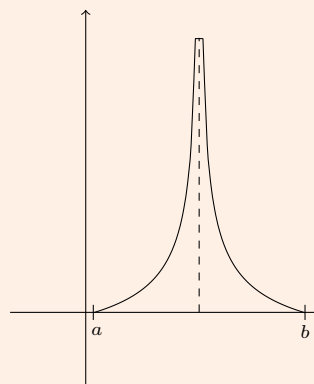
**OSSERVAZIONE.**

Non c'è relazione tra le norme lagrangiane e quelle integrali: ci possono essere funzioni  $f$  come quella in figura che hanno una norma lagrangiana “molto grande”

$$\|f\|_{C^0([a,b])} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

ma una norma integrale “piccola”

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx.$$



## 6.3 SPAZI METRICI

**DEFINIZIONE 6.3.1. (Distanza, spazio metrico).**

Una funzione  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  è detta **distanza** su  $X$  se soddisfa le proprietà seguenti:

1. **Positività:**  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$ ;
2. **Simmetria:**  $d(x, y) = d(y, x); \quad \forall x, y \in X$ ;
3. **Disuguaglianza triangolare:**  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y); \quad \forall x, y, z \in X$ .

Una coppia  $(X, d)$  dove  $X$  è un insieme e  $d$  è una distanza su  $X$  è detta **spazio metrico**.

**OSSERVAZIONI.**

- Una norma induce naturalmente una distanza

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

ma non vale necessariamente il viceversa, in quanto uno spazio metrico non ha necessariamente una struttura di spazio vettoriale, necessaria per la definizione di norma.

- In un qualunque insieme  $X$  si può definire la **distanza banale** come

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

- Dato uno spazio metrico  $X$ , ogni sottoinsieme  $Y \subseteq X$  eredita la struttura di spazio metrico.

**DEFINIZIONE 6.3.2. (PALLA).**

Sia  $X$  uno spazio metrico e  $x_0 \in X$ . Definiamo **intorno sferico** di  $x_0$  di raggio  $r > 0$  o **palla** di raggio  $r > 0$  e centro  $x_0$  il sottoinsieme

$$B_r(x_0) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}.$$

Uno spazio metrico è anche topologico poiché la metrica induce una topologia di Hausdorff, quindi ha senso la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 6.3.3. (LIMITE).**

- Data una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(X, d)$  spazio metrico diciamo che il **limite** di  $x_n$  al crescere di  $n$  è uguale a  $\bar{x}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x},$$

se  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \bar{x}) = 0$ , ovvero se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$$

- Siano  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  due spazi metrici e siano  $x_0 \in X$ ,  $\ell \in Y$  e  $f : X \rightarrow Y$ . Diciamo che il limite per  $x$  che tende a  $x_0$  di  $f(x)$  è uguale a  $\ell$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell,$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

**OSSERVAZIONE.** Per definizione, una successione di funzioni  $\{f_n\}_n$  converge uniformemente a  $f$  se converge secondo la metrica indotta dalla *norma lagrangiana*.

Definite le nozioni di norma e distanza in uno spazio metrico, è opportuno chiedersi quando queste inducano la stessa topologia. Introduciamo pertanto la seguente:

**DEFINIZIONE 6.3.4. (NORME E DISTANZE EQUIVALENTI).**

Due norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  definite sullo stesso spazio vettoriale  $E$  si dicono **equivalenti** se esiste  $C > 0$  tale che:

$$C^{-1}\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq C\|\mathbf{x}\|_1 \quad \forall \mathbf{x} \in E.$$

Due distanze  $d_1$  e  $d_2$  definite sullo stesso insieme  $X$  si dicono **equivalenti** se  $C > 0$  tale che:

$$C^{-1}d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

**OSSERVAZIONE.** Due distanze equivalenti inducono la stessa topologia e determinano pertanto la stessa nozione di convergenza.

Dalla proposizione 6.1.1 segue che in  $\mathbb{R}^n$  la norma-1, la norma-2 e la norma- $\infty$  sono equivalenti. Si può dimostrare che tutte le norme- $p$  sono equivalenti.

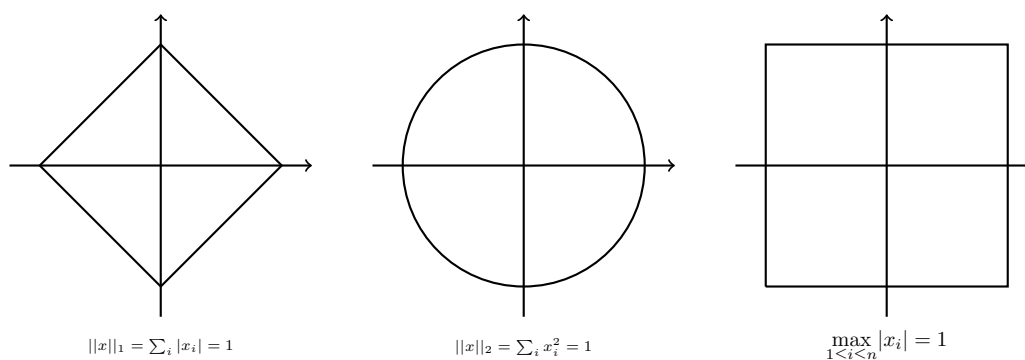


FIGURA 6.1 – Norme a confronto.

Più complicati sono gli *spazi di funzioni*, in cui in generale le norme *non* sono equivalenti. Per convincersi di questo fatto, consideriamo  $X_0 = C^0([0, 2\pi])$  e  $X_1 = C^1([0, 2\pi])$  con le opportune norme lagrangiane. Ogni funzione della successione di funzioni  $f_n(x) = \sin(nx)$  ha norma 1 in  $X_0$ , infatti:

$$\|f\|_{X_0} = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)| = 1.$$

Osservando che  $f'(x) = n \cos(nx)$  la stessa funzione in  $X_1$  ha norma:

$$\|f\|_{X_1} = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)| + \max_{x \in [0, 2\pi]} |f'(x)| = 1 + n \rightarrow \infty \text{ per } n \rightarrow \infty$$

quindi in  $X_1 = C^1([0, 2\pi])$   $f_n(x)$  *non* converge.

#### DEFINIZIONE 6.3.5. (INSIEME APERTO, LIMITATO).

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico.  $A \subseteq X$  è:

1. **limitato** se è contenuto in una palla centrata in un qualsiasi elemento di  $X$ :  $\exists x_0 \in X, \exists r > 0$  tali che  $A \subseteq B_r(x_0)$ ;
2. **aperto** se è intorno di ogni suo punto, ovvero se  $\forall x \in A \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A$ .  $C \subseteq X$  è chiuso se  $X \setminus C$  è aperto.

#### DEFINIZIONE 6.3.6. (INSIEME COMPATTO).

Un insieme si dice **compatto** se da ogni famiglia arbitraria di aperti  $\{A_i\}_{i \in I}$  che ricopre  $X$ , cioè

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

si può estrarre un sottoricoprimento finito  $\{A_j\}_{j \in J} \subseteq \{A_i\}_{i \in I}$  con  $J \subseteq I$  e  $|J| < \infty$ :

$$X = \bigcup_{\substack{j \in J \\ |J| < \infty}} A_j$$

### 6.3.1 Continuità e continuità uniforme

Ampliamo ora la nozione di continuità vista in  $\mathbb{R}^n$  presentandone la definizione e le proprietà più generali relativi agli spazi metrici. Nel seguito  $f$  sarà una funzione tra due spazi metrici  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  qualsiasi.

#### DEFINIZIONE 6.3.7. (CONTINUITÀ IN UN PUNTO).

Una funzione  $f$  si dice **continua** in  $x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

#### DEFINIZIONE 6.3.8. (CONTINUITÀ IN UN INSIEME).

Una funzione  $f$  è **continua** in  $X$  se è continua in ogni  $x_0 \in X$ , ossia

$$\forall x_0 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x, \varepsilon) > 0 \text{ tale che, } d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

**RICORDIAMO...** Da un punto di vista topologico, una funzione  $f$  è **continua** se e solo se le controimmagini di insiemi aperti (o chiusi) sono aperte (o chiuse).

**DEFINIZIONE 6.4.1. (CONTINUITÀ UNIFORME).**

Una funzione  $f$  si dice **uniformemente continua** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che, } d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \forall x, y \in X.$$

**TEOREMA 6.4.1. (HEINE-CANTOR).**

Se  $(X, d_X)$  è uno spazio metrico compatto e  $(Y, d_Y)$  è uno spazio metrico qualunque, allora ogni funzione  $f : X \longrightarrow Y$  continua è anche uniformemente continua.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\varepsilon > 0$ . Essendo  $f$  continua, allora

$$\exists \delta = \delta(x, \varepsilon): \quad d_X(y, x) < 2\delta_x \implies d_Y(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vogliamo trovare un  $\delta$  che non dipenda da  $x$ . Essendo  $X$  compatto, possiamo estrarre dal ricoprimento aperto di  $X$  formato dalle palle aperte  $\{B_{\delta(x)}(x)\}$  un sottoricoprimento finito formato da  $k$  palle centrate in  $k$  punti, ovvero  $X = \bigcup_{i=1}^k B_{\delta(x_i)}(x_i)$ . Chiamiamo  $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \delta(x_i)$  e consideriamo  $x, y \in X$  tali che  $d_X(x, y) < \delta$  e un  $x_j$  tra i  $k$  punti tale che  $x \in B_{\delta(x_j)}(x_j)$ . Sappiamo che  $d_X(x, x_j) < \delta(x_j)$ , quindi

$$d_X(y, x_j) \leq d_X(y, x) + d_X(x, x_j) < \delta + \delta(x_j) \leq 2\delta(x_j).$$

Da questa disuguaglianza otteniamo la prima delle seguenti disuguaglianze, mentre dalla continuità di  $f$  otteniamo la seconda:

$$d_Y(f(y), f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}; \quad d_Y(f(x), f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Possiamo ora concludere che

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f(x_j)) + d_Y(f(x_j), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

## 6.4.1 Alcuni teoremi sugli spazi metrici

Concludiamo questa panoramica degli spazi metrici con una carrellata di teoremi - senza dimostrazione - già visti in *Analisi Matematica I* o in *Geometria 2*, eventualmente estesi agli spazi metrici generici.

**TEOREMA 6.4.2. (HEINE-BOREL).**

In  $\mathbb{R}^n$  con la distanza euclidea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  è compatto se e solo se è chiuso e limitato. □

**TEOREMA 6.4.3. (WEIERSTRASS).**

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico compatto e  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  assume in  $X$  il suo massimo e il suo minimo. □

**TEOREMA 6.4.4. (BOLZANO-WEIERSTRASS).**

Uno spazio metrico  $(X, d)$  è compatto se e solo se ogni successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a valori in  $X$  ammette una sottosuccessione convergente. □

## 6.4.2 Spazi metrici completi

**DEFINIZIONE 6.4.2. (SUCCESIONE DI CAUCHY, SPAZI COMPLETI E DI BANACH).**

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  è detta **di Cauchy** (o **fondamentale**) se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > \bar{n} \ d(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

- Uno spazio metrico è detto **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.
- Uno spazio metrico è detto **di Banach** quando è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

**PROPOSIZIONE 6.4.I. (SOTTOSPAZI DI SPAZI COMPLETI SONO COMPLETI SE E SOLO SE CHIUSI).**

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $X_1 \subseteq X$ . Allora  $(X_1, d_X)$  è completo se e solo se  $X_1$  è chiuso in  $X$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che in uno spazio metrico vale che

$$X_1 \subseteq X \text{ è chiuso} \iff \forall \{x_n\}_n \subseteq X_1 : x_n \rightarrow \bar{x}, \bar{x} \in X_1$$

$\Leftarrow$ ) Sia  $\{x_n\}_n \subseteq X_1$  una successione di Cauchy. Allora, dato che  $X$  è completo,  $x_n \rightarrow \bar{x} \in X$ , ma  $X_1$  chiuso, dunque  $\bar{x} \in X_1$ .

$\Rightarrow$ ) Se  $(X_1, d)$  è completo e se  $\{x_n\}_n \subseteq X_1$  è tale che  $x_n \rightarrow \bar{x} \in X$ , allora  $\{x_n\}_n$  è di Cauchy in  $X$  e anche in  $X_1$ , dunque convergente a  $\bar{x} \in X_1$ ; quindi  $X_1$  è chiuso.  $\square$

Discutiamo ora tre proposizioni, particolarmente potenti, che ci permettono di descrivere la relazione tra successioni convergenti e di Cauchy.

**PROPOSIZIONE (OGNI SUCCESIONE CONVERGENTE È DI CAUCHY).**

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione convergente, tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , ossia

$$\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Consideriamo  $n, m \geq N$  e abbiamo la tesi:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(l, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon . \quad \square$$

**PROPOSIZIONE (UNA SUCCESIONE DI CAUCHY CON SOTTOSUCCESIONE CONVERGENTE CONVERGE).**

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy che ammetta una sottosuccessione convergente  $\{x_{n_k}\}$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = \ell$ , ossia

$$\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies d(x_{n_k}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Sappiamo inoltre che la successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon): \quad \forall n, m > \bar{n} \quad d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora scegliamo  $\tilde{n} = \max N, \bar{n}$  e abbiamo

$$d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

**PROPOSIZIONE (LE SUCCESSIONI DI CAUCHY IN SPAZI NORMATI SONO LIMITATE).**

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy. Per definizione, si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon): \quad \forall n, m > \bar{n} \quad d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) < \varepsilon$$

e, in particolare, ciò vale per  $\varepsilon = 1$ . Allora, per ogni  $n, m \geq \bar{n}$  vale

$$\|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m + \mathbf{x}_m\| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| + \|\mathbf{x}_m\| < 1 + \|\mathbf{x}_m\| = M_1.$$

Poniamo  $M_2 = \max_{n \in \mathbb{N}} \{\|\mathbf{x}_n\|\}$  e  $M = \max(M_1, M_2)$  e si ha che  $\forall n \in \mathbb{N} \|\mathbf{x}_n\| \leq M$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE.** La dimostrazione effettuata si può generalizzare opportunamente per uno spazio metrico.

Grazie a queste proprietà possiamo estendere un risultato visto in *Analisi Matematica I* sulla completezza dei reali:

**TEOREMA ( $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$  È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO).**

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare il teorema, basta osservare che:

1. Ogni successione di Cauchy è limitata - ciò è vero in ogni spazio metrico;
2. Ogni sottosuccessione limitata ammette una sottosuccessione convergente;
3. Se una successione di Cauchy ammette una sottosuccessione convergente, allora la successione converge.  $\square$

Tuttavia, per i nostri scopi è più interessante il seguente

**TEOREMA ( $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_{C^0([a, b])})$  È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO).**

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy, ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m > \bar{n} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Come affermato nella prima osservazione di pag. 83, dobbiamo mostrare la convergenza uniforme della successione. Dividiamo la dimostrazione nei tre passi seguenti:

1. **Convergenza puntuale.** Fissato  $x \in [a, b]$ , la successione  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è anch'essa di Cauchy, dunque convergente in quanto  $\mathbb{R}$  è uno spazio completo. Segue che  $\{f_n\}$  converge puntualmente ad una funzione  $f$ .



2. **Convergenza nella norma lagrangiana.** Fissato  $\varepsilon > 0$ , allora  $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall m, n \geq \bar{n}$  e  $\forall x \in [a, b]$  si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Facendo tendere  $m \rightarrow \infty$  si ha che  $\forall \varepsilon \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall n \geq \bar{n}$  e  $\forall x \in [a, b]$  si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

In particolare,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x), f(x)) = 0.$$

3.  **$f$  è continua.<sup>a</sup>** Sia  $x_0 \in [a, b]$  fissato. Preso

$$\varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f_{\bar{n}}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sappiamo inoltre che  $f_{\bar{n}}$  è continua in  $x_0$ : perciò, dato  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Quindi, se  $|x - x_0| < \delta$  abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{\bar{n}}(x)| + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + |f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square$$

<sup>a</sup>La verifica è necessaria per garantire che  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ . Ciò nonostante, abbiamo già dimostrato nel capitolo precedente che la convergenza uniforme di funzioni continue implica la continuità della funzione limite, quindi si può anche usare direttamente questo risultato.

Si può dimostrare in maniera analoga che anche gli spazi  $\mathcal{C}^k([a, b])$  sono completi.

**TEOREMA 6.4.7. (COMPLETEZZA DEGLI OPERATORI LIMITATI).**

Siano  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$  due spazi normati e supponiamo che  $(F, \|\cdot\|_F)$  sia completo. Sia inoltre  $X = \{T \in \mathcal{L}(E, F) : \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} < +\infty\}$  l'insieme degli operatori limitati con  $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ . Allora  $(X, \|\cdot\|_X)$  è uno spazio metrico completo.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in  $X$ : fissato  $\mathbf{x} \in E$ ,  $\{A_n \mathbf{x}\}_n$  è una successione in  $F$  - essendo gli  $A_n$  operatori tra  $E$  e  $F$  - ed è anche di Cauchy,

$$\|A_n \mathbf{x} - A_m \mathbf{x}\|_F \leq \|A_n - A_m\|_X \|\mathbf{x}\|_E,$$

quindi converge a un limite che è una funzione lineare  $A \mathbf{x} \in F$ , ossia  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ . Dobbiamo dimostrare che  $\|A_n - A\|_X \rightarrow 0$ , che implica anche  $\|A\| < +\infty$ : avendo la convergenza della successione di Cauchy a un operatore limitato avremo la completezza di  $X$ . Sia  $\varepsilon > 0$  e  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall n, m \geq \bar{n} \|A_n - A_m\|_X < \varepsilon$ :

$$\|(A_n - A) \mathbf{x}\|_F \leq \|(A_n - A_m) \mathbf{x}\|_F + \|A_m \mathbf{x} - A \mathbf{x}\|_F \leq \|A_n - A_m\|_X \|\mathbf{x}\|_E + \|A_m \mathbf{x} - A \mathbf{x}\|_F$$

Per  $\mathbf{x} \in E$  fissato, sappiamo che  $A_m \mathbf{x} \rightarrow A \mathbf{x}$ . Scegliamo quindi un  $m = m(\mathbf{x}) \geq \bar{n}$  dipendente da  $\mathbf{x}$  e arbitrariamente grande, così da far tendere a zero l'ultimo termine della

maggiorazione precedente. Otteniamo, ricordandoci che la successione di partenza è di Cauchy, che  $\|(A_n - A)\mathbf{x}\|_F < \varepsilon \|\mathbf{x}\|_E$ , quindi

$$\|(A_n - A)\mathbf{x}\|_F < 2\varepsilon \|\mathbf{x}\|_E \quad \forall n \geq \bar{n} \implies \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|(A_n - A)\mathbf{x}\|_F \leq 2\varepsilon. \quad \square$$

**TEOREMA 6.4.8. (CONVERGENZA ASSOLUTA E PUNTUALE IN SPAZI DI BANACH).**

Dato  $(E, \|\cdot\|)$  spazio di Banach, allora se  $\sum_{n=0}^{+\infty} \|\mathbf{x}_n\| < +\infty$  la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{x}_n$  converge in  $E$ , ovvero la convergenza assoluta implica la convergenza puntuale in uno spazio di Banach.

**DIMOSTRAZIONE.** Mostriamo che la successione delle somme parziali  $\mathbf{s}_n = \sum_{k=0}^n \mathbf{x}_k$  è di Cauchy:

$$\|\mathbf{s}_{n+j} - \mathbf{s}_n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n+j} \mathbf{x}_k - \sum_{k=0}^n \mathbf{x}_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+j} \mathbf{x}_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+j} \|\mathbf{x}_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|\mathbf{x}_k\|.$$

Per ipotesi sappiamo che l'ultima serie con cui abbiamo maggiorato converge, quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|\mathbf{x}_k\| = 0,$$

ossia:

$$\forall \varepsilon \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|\mathbf{x}_k\| < \varepsilon.$$

Per lo stesso  $\bar{n}$ , se  $m \geq n \geq \bar{n}$  si ha  $\|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n\| < \varepsilon$ . □

### 6.4.3 Teorema delle contrazioni o di Banach-Caccioppoli

Prima di trattare il teorema che dà il nome alla sezione, cerchiamo di capire cosa sia una contrazione in uno spazio metrico.

**DEFINIZIONE 6.4.3. (CONTRAZIONE).**

Sia  $(X, d)$  spazio metrico. Una funzione  $T : X \longrightarrow X$  è detta **contrazione** se  $\exists L < 1$  tale che  $d(T(x), T(y)) \leq L d(x, y)$ .

Intuitivamente, dati due punti una contrazione *riduce* la distanza tra di essi.

**OSSERVAZIONE.** Le contrazioni sono funzioni *lipschitziane*.

**DEFINIZIONE 6.4.4. (PUNTO FISSO).**

Data una funzione  $T : X \longrightarrow X$ , un punto  $x \in X$  è detto **punto fisso** se  $T(x) = x$ .

**TEOREMA 6.4.9. (CONTRAZIONI O DI BANACH-CACCIOPPOLI).**

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $T$  una contrazione in  $X$ . Allora  $T$  ammette un unico punto fisso.

**DIMOSTRAZIONE.**

- **Esistenza.** Sia  $x_0 \in X$ . Consideriamo la successione

$$\begin{aligned}x_1 &= T(x_0); \\x_2 &= T(x_1) = T^2(x_0); \\&\vdots \\x_n &= T(x_{n-1}) = \dots = T^n(x_0).\end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che questa successione è di Cauchy. Osserviamo che

$$\begin{aligned}d(x_2, x_1) &= d(T(x_1), T(x_0)) \leq Ld(x_1, x_0); \\d(x_3, x_2) &= d(T(x_2), T(x_1)) \leq Ld(x_2, x_1) \leq L^2d(x_1, x_0); \\&\vdots \\d(x_{n+1}, x_n) &\leq L^n d(x_1, x_0);\end{aligned}$$

dunque, presi  $n \geq m$ , con  $n = m + h$ , si ha

$$\begin{aligned}d(x_n, x_m) &= d(x_{m+h}, x_m) \leq d(x_{m+h}, x_{m+h-1}) + d(x_{m+h-1}, x_{m+h-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\&\leq L^{m+h-1}d(x_1, x_0) + \dots + L^m d(x_1, x_0) \\&= L^m d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{h-1} L^j \\&= L^m d(x_1, x_0) \frac{1 - L^h}{1 - L} \\&\leq \frac{L^m}{1 - L} d(x_1, x_0).\end{aligned}$$

Essendo  $0 < L < 1$ ,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} L^m = 0.$$

Per ogni  $\forall \varepsilon > 0$  possiamo trovare dunque un  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  sufficientemente grande tale che  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ . La successione è quindi di Cauchy, cioè convergente ad un punto  $\bar{x}$ . Siamo anche in grado di quantificare  $\bar{n}$ :

$$\frac{L^{\bar{n}}}{1 - L} d(x_1, x_0) < \varepsilon \iff L^{\bar{n}} < \varepsilon \frac{1 - L}{d(x_1, x_0)} \iff \bar{n} > \log \left( \varepsilon \frac{1 - L}{d(x_1, x_0)} \right) \frac{1}{\log L}.$$

Osservando che essendo  $T$  lipschitziana,  $T$  è ovviamente continua, si ha

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = T(\bar{x})$$

dunque  $\bar{x}$  è un punto fisso.

- **Unicità.** Siano  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  punti fissi. Allora

$$d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = d(T(\bar{x}_1), T(\bar{x}_2)) \leq Ld(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Rightarrow (1 - L)d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq 0 \Rightarrow d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0.$$

Essendo  $(1 - L) > 0$  deve essere  $d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ , ovvero  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ . □

## 6.4.3.1 Stima dell'errore

La dimostrazione del teorema ci fornisce una successione che, a partire da un  $x_0$  arbitrario, si avvicina sempre di più al punto fisso  $\bar{x}$ . Vogliamo tuttavia avere una stima di *quanto* sia questo errore tra  $x_n$  e  $\bar{x}$  al crescere della successione. Nella dimostrazione abbiamo ricavato la formula

$$d(x_{m+h}, x_m) \leq \frac{L^m}{1-L} d(x_1, x_0) = \frac{L^m}{1-L} d(T(x_0), x_0);$$

facendo tendere  $h \rightarrow \infty$  ricaviamo una **stima dell'errore**:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} d(x_{m+h}, x_m) = d(\bar{x}, x_m) \leq \frac{L^m}{1-L} d(T(x_0), x_0).$$

Se  $m = 0$ ,

$$d(\bar{x}, x_0) \leq \frac{1}{1-L} d(T(x_0), x_0). \quad (6.1)$$

Essendo  $L < 1$ , allora l'errore  $d(\bar{x}, x_m)$  decresce *esponenzialmente* al crescere di  $m$ .

## 6.4.3.2 Applicazioni del teorema delle contrazioni

**ESEMPIO.** Consideriamo la semiretta reale positiva  $X = [0, +\infty)$ . Verifichiamo che la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2}$$

sia una contrazione. Infatti, presi  $0 \leq x \leq y$ , per il *Teorema di Lagrange*

$$\exists \xi \in (x, y): f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y - x|.$$

Ma

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{2} \Rightarrow |f'(\xi)| = \frac{e^{-\xi}}{2}.$$

La funzione  $\frac{e^{-x}}{2}$  è limitata in  $[0, +\infty)$  con valore massimo  $\frac{1}{2}$ , dunque

$$d(f(x), f(y)) = |f(y) - f(x)| = \frac{e^{-\xi}}{2} |y - x| \leq \frac{1}{2} |y - x|,$$

cioè  $f$  è una contrazione con costante  $L = \frac{1}{2}$ . Algebricamente, si può vedere che il punto fisso  $\bar{x} \approx 0.351733$ . Partendo da  $x_0 = 1$  possiamo vedere che

$$d(\bar{x}, x_0) \approx 0.648267$$

$$d(\bar{x}, x_1) = d\left(\bar{x}, \frac{e^{-1}}{2}\right) \approx 0.167793$$

$$d(\bar{x}, x_2) = d\left(\bar{x}, \frac{e^{-x_1}}{2}\right) \approx 0.064259$$

**ESEMPIO.** Una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  con  $\|d_x f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq L < 1, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  è una contrazione. Infatti, chiamata  $r(t) = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  la parametrizzazione del

segmento  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ , si ha

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})))dt = \int_0^1 d_{r(t)f}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dt.$$

Maggioriamo la norma di  $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$  con l'integrale della norma dell'ultimo termine e utilizziamo la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \leq \int_0^1 \|d_{r(t)f}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| dt.$$

Osserviamo che per ogni  $z \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  si ha  $\|d_z f\| \leq L$ , quindi abbiamo

$$\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Abbiamo dimostrato il seguente:

**TEOREMA 6.4.IO. (LIPSCHITZIANITÀ DI UNA FUNZIONE  $\mathcal{C}^1$ ).**

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A$  aperto,  $f \in \mathcal{C}^1(A)$  e sia  $W = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  tali che il segmento  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset A$ . Allora

$$\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \leq \max_{z \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]} \|d_z f\|_W \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|. \quad (6.2)$$

□

**ESEMPIO.** Sia  $I \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  l'operatore identità; data  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  con  $\|A\| < 1$ , allora  $I - A$  è invertibile. Per mostrarlo, trasformiamo il problema in uno di punto fisso: per  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  vogliamo risolvere  $\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , cioè trovare  $\mathbf{x}$  tale che  $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{y}$ . Definiamo  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{y}$  e osserviamo che

$$\|T(\mathbf{x}_1) - T(\mathbf{x}_2)\|_{\mathbb{R}^n} = \|A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2\|_{\mathbb{R}^n} = \|A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Fissato  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  abbiamo la seguente successione delle iterate:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= T(\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \\ \mathbf{x}_2 &= T(\mathbf{x}_1) = A\mathbf{x}_1 + \mathbf{y} = A^2\mathbf{x}_0 + A\mathbf{y} + \mathbf{y} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n &= T(\mathbf{x}_{n-1}) = A^n\mathbf{x}_0 + A^{n-1}\mathbf{y} + A^{n-2}\mathbf{y} + \dots + A\mathbf{y} + \mathbf{y} = A^n\mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{n-1} A^j\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Per il teorema delle contrazioni sappiamo che  $T$  ha un unico punto fisso  $\bar{\mathbf{x}}$  tale per cui  $\mathbf{x}_n \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ ; si ha

$$A\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}} \iff (I - A)\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{y} \iff (I - A)^{-1}\mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}}.$$

Quindi per  $n \rightarrow +\infty$  abbiamo  $\|A^n\mathbf{x}_0\| \leq \|A\|^n\|\mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$  e la serie  $\sum_{j=0}^{+\infty} A^j$  converge essendo una serie geometrica di ragione in modulo minore di 1. Concludiamo che

$$(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} A^j.$$

# TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA

*“Sul serio, adesso se avete un cioccolatino o qualcosa del genere è il momento di mangiarlo, che inizia la salita.”*

SUSANNA TERRACINI, *Alpinoanalista.*

**I**L TEOREMA della funzione implicita è un teorema fondamentale che ci accompagnerà non solo nel resto di questo corso, ma anche (e soprattutto) nella nostra vita di matematici. Enunceremo e dimostreremo il teorema in dimensione qualsiasi (purché finita). Iniziamo con alcuni risultati che ci serviranno.

**DEFINIZIONE 7.0.I. (Distanza Prodotto).**

Dati due spazi metrici  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$ , possiamo definire la **distanza prodotto** sul prodotto cartesiano  $X \times Y$  come la distanza data da

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2)}.$$

Banalmente, presi  $X, Y = \mathbb{R}$  con la distanza euclidea, la distanza prodotto è la distanza euclidea su  $\mathbb{R}^2$ .

**COROLLARIO 7.0.I. (VERSIONE PARAMETRICA DEL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI).**

Siano  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$ , con  $(Y, d_Y)$  completo. Sia  $T: X \times Y \rightarrow Y$  una funzione continua tale che

$$\exists L < 1: d_Y(T(x, y_1), T(x, y_2)) < L d_Y(y_1, y_2), \quad \forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y$$

Allora, per ogni  $x \in X$  esiste ed è unico il punto fisso  $\bar{y}$ . Inoltre la funzione

$$\begin{aligned} \varphi: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \bar{y} \end{aligned}$$

è ben definita e continua in ogni  $x \in X$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Al variare di  $x$ , la funzione  $\tilde{T}(y) = T(x, y)$  è una contrazione, dunque esiste un unico punto fisso  $\bar{y}$ , quindi  $\varphi$  è ben definita e si ha  $T(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$ . Riprendiamo la costruzione iterativa del punto fisso  $\bar{y}$ ; fissato  $x$ , partiamo da  $y_0$ :

$$\begin{aligned}y_1(x) &= T(x, y_0) \\y_2(x) &= T(x, y_1) \\&\vdots \\y_{n+1}(x) &= T(x, y_n)\end{aligned}$$

Per  $n \rightarrow +\infty$  si ha  $\bar{y} = \varphi(x)$ . Fissiamo  $x_0 \in X$  e  $y_0 = \varphi(x_0)$  tali che  $T(x_0, y_0) = y_0$ . Abbiamo la stima quantitativa (6.1):

$$d(\bar{y}, y_0) \leq \frac{1}{1-L} d(T(x, y_0), y_0).$$

Essendo  $T$  continua si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \text{ si ha } d(T(x, y), T(x_0, y_0)) < \varepsilon.$$

Sia dunque  $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$  così da avere  $d(\overbrace{T(x, y_0)}^{=y_1(x)}, y_0) < \varepsilon$ . Allora

$$d(\varphi(x), y_0) < \frac{1}{1-L} d(T(x, y_0), y_0) < \frac{\varepsilon}{1-L}$$

e il  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = y_0 = \varphi(x_0)$ , dunque  $\varphi$  è continua.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Quello che abbiamo appena fatto è stato fissare  $x \in X$  e risolvere l'equazione:

$$T(x, y) = y$$

rispetto a  $y$ . Possiamo scrivere:

$$G(x, y) = y - T(x, y) = 0 \iff y = \phi(x).$$

**DEFINIZIONE 7.0.2. (FUNZIONE DEFINITA IMPLICITAMENTE).**

Diciamo che l'equazione  $G(x, y) = 0$  definisce **implicitamente** la funzione  $y = \phi(x)$  se

$$\forall (x, y) \in X \times Y, \quad G(x, y) = 0 \iff y = \phi(x).$$

**ESEMPIO.** Sia in  $\mathbb{R}^2$  l'equazione

$$g(x, y) = (1 + x^2)e^y - 2 - x^2 = 0$$

Questa equazione si può risolvere rispetto a  $y$ :

$$\begin{aligned}(1 + x^2)e^y - 2 - x^2 &= 0 \\(1 + x^2)e^y &= 2 + x^2\end{aligned}$$

$$e^y = \frac{2+x^2}{1+x^2}$$

$$y = \ln\left(\frac{2+x^2}{1+x^2}\right).$$

Consideriamo la funzione  $\varphi(x) = \ln\left(\frac{2+x^2}{1+x^2}\right)$ :

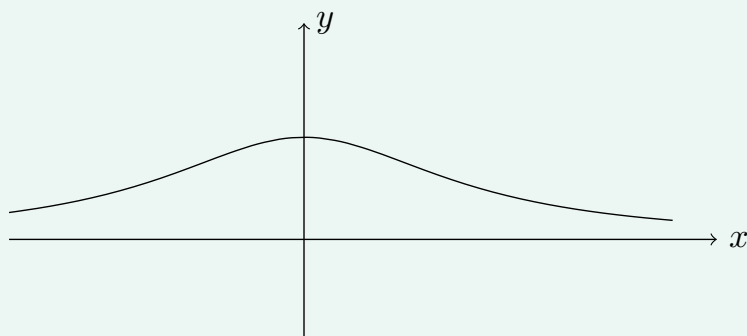


FIGURA 7.1 – Grafico della funzione  $\varphi(x)$ .

Il grafico rappresenta la linea di livello  $g(x, y) = 0$ . Osserviamo che:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = (1+x^2)e^y > 0$$

Al crescere di  $y$  la funzione cresce sempre: sopra il grafico troviamo i punti per cui  $g(x, y) > 0$ , mentre sotto il grafico i punti per cui  $g(x, y) < 0$  separati dal grafico di  $\varphi(x)$ .

**ESEMPIO.** L'equazione  $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$  non è mai verificata e non definisce alcuna funzione.

**ESEMPIO.** Siano date due matrici  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{m,m}$  e un vettore  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ . Consideriamo la funzione

$$G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(x, y) \longmapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{By} - \mathbf{h}'$$

che può essere vista come un sistema di equazioni in  $n + m$  incognite

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n + b_{1,1}y_1 + \dots + b_{1,m}y_m = h_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n + b_{2,1}y_1 + \dots + b_{2,m}y_m = h_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n + b_{m,1}y_1 + \dots + b_{m,m}y_m = h_m \end{cases}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{Ax}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{By}}$

Il sistema è risolubile rispetto a  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$  se la matrice  $B$  è invertibile. In tal caso

$$\mathbf{y} = -B^{-1}\mathbf{Ax} + B^{-1}\mathbf{h} \implies \varphi(\mathbf{x}) = -B^{-1}\mathbf{Ax} + B^{-1}\mathbf{h}$$



Se  $B$  non è invertibile il sistema non è risolvibile per  $A$  e  $\mathbf{h}$  qualsiasi. Osserviamo che  $A = D_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  e  $B = D_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , con  $D_x G$  e  $D_y G$  matrici jacobiane parziali<sup>a</sup> relative alle variabili  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ :

$$D_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

Inoltre, si noti che  $\varphi$  è differenziabile se  $B = D_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  è invertibile e risulta

$$J_\varphi(\mathbf{x}) = -D_y G^{-1}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) D_x G(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})).$$

<sup>a</sup>Da alcuni autori vengono indicate con  $\partial_x G$  e  $\partial_y G$ .

Questi esempi - in particolare l'ultimo - ci inducono a formulare il seguente ed *importantissimo* teorema.

### 7.1 TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA (O DI DINI)

#### TEOREMA 7.1.1. (TEOREMA DI DINI).

Sia  $G : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A$  aperto,  $G \in C^1(A)$  e  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ . Supponiamo che:

- $G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ ;
- $D_y G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  sia invertibile.

Allora esistono  $\delta > 0$ ,  $\sigma > 0$  e un'unica funzione  $\varphi : I \rightarrow J$  di classe  $C^1(I)$ , con  $I = B_\delta(\mathbf{x}_0)$  e  $J = B_\sigma(\mathbf{y}_0)$ , tale che:

1.  $\varphi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ ;
2.  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  in  $I \times J \iff \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ ;
3.  $J_\varphi(\mathbf{x}) = -D_y G^{-1}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) D_x G(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in I$

**DIMOSTRAZIONE.** Per prima cosa, osserviamo che possiamo sempre ricondurci al caso in cui  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (0, 0)$  e  $D_y G(0, 0) = I$  sostituendo  $G$  con  $\tilde{G}$ :

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D_y G^{-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) G(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}, \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}), \quad (7.1)$$

quindi assumiamo  $D_y G(0, 0) = I$ . Vogliamo risolvere  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  rispetto a  $\mathbf{y}$ . Scriviamo l'equazione come punto fisso:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{y} - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}.$$

Poniamo  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  e, fissato  $\mathbf{x}$ , utilizzando (6.2) vale

$$\|T(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - T(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \max_{\mathbf{y} \in [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]} \|D_y T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\mathbb{R}^m}.$$

Osserviamo anche che

$$D_y T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} (\mathbf{y} - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = I - D_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D_y G(0, 0) - D_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

e poiché  $T$  è di classe  $\mathcal{C}^1(A)$  - essendo differenza di funzioni  $\mathcal{C}^1(A)$  - abbiamo

$$\lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (0,0)} D_y T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (0,0)} \|D_y T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| = 0, \quad (7.2)$$

in particolare, preso  $L = \frac{1}{2}$ , esistono  $\delta > 0, \sigma > 0$  tali che se  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$  e  $\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^m} < \sigma$  allora  $\|D_y T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq L$ .<sup>a</sup> In questo modo otteniamo:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta, \|\mathbf{y}_1\|_{\mathbb{R}^m}, \|\mathbf{y}_2\|_{\mathbb{R}^m} < \sigma \implies \|T(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - T(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\| \leq L\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \quad (7.3)$$

Vogliamo applicare il corollario 7.0.1 del teorema delle contrazioni. Per farlo, poniamo  $X = B_\delta(0)$  e  $Y = B_\sigma(0)$  con le distanze euclidee<sup>b</sup> e verifichiamo che  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Y$ . Per mostrare questo fatto, prendendo eventualmente un  $\tilde{\delta} < \delta$ , possiamo supporre per continuità di  $T$  e poiché  $T(0, 0) = 0$  che

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} < \tilde{\delta} \implies \|T(\mathbf{x}, 0)\| < (1 - L)\sigma. \quad (7.4)$$

Abbiamo quindi

$$\|T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq \|T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - T(\mathbf{x}, 0)\| + \|T(\mathbf{x}, 0)\| \leq \underbrace{L\|\mathbf{y}\|}_{\text{da (7.3)}} + \underbrace{(1 - L)\sigma}_{\text{da (7.4)}} < \sigma.$$

Dunque, se  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$  e  $\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^m} < \sigma$  si ha  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Y$ . Possiamo applicare il corollario: esiste<sup>c</sup>  $\varphi : I = X = B_\delta(0) \longrightarrow J = Y^0 = B_\sigma(0)$  tale che  $T(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \varphi(\mathbf{x})$ , ossia  $G(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = 0$ . La funzione  $\varphi$  è:

1. *continua in  $I$* : ciò segue dal Corollario 7.0.1;
2. *unica*: se vale  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$  con  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in I \times J$ , allora  $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ , anche questo segue dal Corollario 7.0.1 e dimostra il punto 2. della tesi;

Inoltre, utilizzando la stima quantitativa (6.1)

$$d(\varphi(\mathbf{x}_2), \varphi(\mathbf{x}_1)) \leq \frac{1}{1 - L} d(T(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1), T(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1))$$

Mostriamo che  $\varphi$  è una funzione lipschitziana. Per farlo riprendiamo la particolare espressione di  $\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  vista in (7.1). Se poniamo  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  abbiamo che

$$D_x T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{y} - D_y G^{-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = -D_y G^{-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) D_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (7.5)$$

Dal punto 3. sappiamo che

$$\|\varphi(\mathbf{x}_2) - \varphi(\mathbf{x}_1)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \frac{1}{1 - L} \|T(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) - T(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)\|_{\mathbb{R}^m} \quad (7.6)$$

$$\leq \frac{1}{1 - L} \max_{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]} \underbrace{\|D_x T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|}_{\text{norma operatoriale}} \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \quad (\text{da (6.1)}) \quad (7.7)$$

$$\leq M \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_{\mathbb{R}^n}; \quad (7.8)$$

Le (7.5) e (7.7) ci suggeriscono di porre, eventualmente restringendo gli intorni  $I$  e  $J$ ,

$$M = \frac{1}{1 - L} \sup_{I \times J} \|D_y G^{-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) D_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|.$$

Ricapitolando,

$$\|\varphi(\mathbf{x}_2) - \varphi(\mathbf{x}_1)\|_{\mathbb{R}^m} \leq M\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_{\mathbb{R}^m} \quad (7.9)$$

ossia  $\varphi$  è una funzione lipschitziana con costante di lipschizianità  $M$ . Studiamo ora la differenziabilità di  $\varphi$ : partiamo studiando l'incremento della funzione  $G(z)$  per un generico  $z$  e cerchiamo di ricondurci a  $\varphi$ .

$$z = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m,1}; \quad G(\mathbf{z}) - G(\mathbf{z}_0) = J_G(\mathbf{z}_0)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + o(\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\|).$$

“Scomponendo”  $\mathbf{z}$  in  $\mathbf{x}$  e  $\varphi(\mathbf{x})$  e la Jacobiana  $J_G(\mathbf{z}_0)$  con le Jacobiane parziali  $D_x G$  e  $D_y G$ , otteniamo

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) - G(\mathbf{x}_0, \varphi(\mathbf{x}_0)) &= D_x G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + D_y G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)) + \\ &+ o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|) = 0. \end{aligned}$$

avendo dimostrato il punto 2. della tesi. Se consideriamo l'ultima uguaglianza, possiamo portare a destra il secondo addendo e moltiplicare per  $-D_y^{-1}G(x_0, y_0)$ : rileggendo da destra otteniamo così la seguente espressione della variazione di  $\varphi$ :

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0) = \underbrace{-D_y^{-1}G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)D_x G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}_{\text{operatore lineare applicato a } \mathbf{x} - \mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \underbrace{o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|)}_{\star}.$$

Ci siamo quasi! Per concludere dobbiamo verificare che  $\star$  sia un  $o$ -piccolo di  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} &= \frac{o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \underbrace{\frac{o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|}}_{\text{infinitesimo per } \|\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0\|} \left( 1 + \underbrace{\frac{\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}}_{\leq M \text{ da (7.9)}} \right). \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che  $\varphi$  è differenziabile nel punto  $\mathbf{x}$ . Possiamo ripetere il ragionamento per ogni punto  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ , purché  $D_y G(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$  sia invertibile.  $\square$

<sup>a</sup>Questo risultato non è altro che una conseguenza del limite (7.2):  $\forall \varepsilon > 0$ , e quindi in particolare per  $\varepsilon = L = \frac{1}{2}$ ,  $\exists \delta_0 = (\delta, \sigma) \in \mathbb{R}^{n+m}$ , tale che se  $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \|\delta_0\|$  - ossia  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} < \|\delta\|$  e  $\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^m} < \|\sigma\|$  - allora  $\|D_y T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| < \varepsilon (= L)$ .

<sup>b</sup>Prendiamo la palla chiusa per avere la completezza del codominio per poter usare la Proposizione 6.4.1, necessaria per applicare il corollario, ma come mostreranno le maggiorazioni successive  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  cade nell'interno della palla e quindi possiamo lavorare con gli intorni aperti.

<sup>c</sup>Chiaramente non è necessario indicare in *tre modi diversi* la stessa cosa, ma qui è stato fatto per sottolineare come  $B_\delta(0)$  e  $B_\sigma(0)$  siano sia gli insiemi  $X$  e  $Y$  del corollario del teorema delle contrazioni, sia gli intorni  $I$  e  $J$  della tesi. Nel seguito continueremo con  $I$  e  $J$ .

## 7.2 FUNZIONE IMPLICITA LOCALE O GLOBALE?

Supponiamo  $G : A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , dove  $A$  aperto,  $G \in C^1(A)$  e  $D_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  invertibile,  $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in G^{-1}(0)$ . Possiamo dedurre l'esistenza di una funzione  $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$  globale,

ovvero tale che  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  se e solo se  $y = \varphi(x) \forall (x, y) \in A$ ? Purtroppo, ciò *non* è sempre possibile.

**ESEMPIO.** Sia

$$\begin{aligned} G : A \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sin(y - x) \end{aligned} .$$

Si ha che  $G(x, y) = 0$  se e solo se  $y = x + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Per  $(\bar{x}, \bar{y})$  tali che  $G(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  la derivata parziale di  $G$  rispetto a  $y$  non è mai nulla:

$$\partial_y G(\bar{x}, \bar{y}) = \cos(\bar{y} - \bar{x}) = (-1)^k \neq 0$$

*Localmente* abbiamo l'esistenza e unicità garantite dal *teorema di Dini*, ma *globalmente* possiamo definire *infinite* funzioni esplicite del tipo  $y = x + k\pi$  al variare di  $k \in \mathbb{Z}$ .

**ESEMPIO.** In dimensioni maggiori la situazione può essere ancora più complicata: sia

$$\begin{aligned} G : A \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, y) &\longmapsto x_2 - x_1 \tan y \end{aligned} .$$

La derivata parziale di  $G$  rispetto a  $y$  non è mai nulla. Infatti, essendo

$$\tan y = \frac{x_2}{x_1}$$

si ha

$$\partial_y G(x_1, x_2, y) = -x_1(1 + \tan^2 y) = -x_1 \left[ 1 + \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \right] = -\frac{1}{x_1}(x_1^2 + x_2^2) .$$

Se vogliamo che la derivata non si annulli e sia ben definita dobbiamo imporre necessariamente  $A \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \neq 0, (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}$ . Non esiste quindi un'unica funzione definita implicitamente da  $g(x_1, x_2, y)$  che sia definita su tutto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

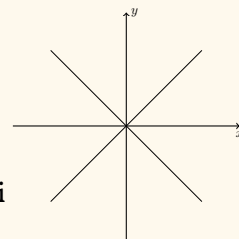
#### DIGRESSIONE (FUNZIONE IMPLICITA SENZA DINI).

Cosa succede se le ipotesi del teorema di Dini *non* sono soddisfatte? Può capitare che non ci sia alcuna funzione implicitamente definita, ma *non* è l'unica possibilità, anzi! Si possono verificare le situazioni più disparate, da studiare *caso per caso*. Per esempio...

- **Non c'è unicità:** sia

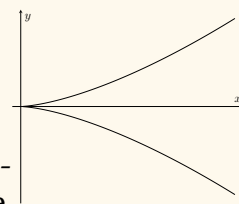
$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 - y^2 \end{aligned} .$$

In un intorno di  $(0, 0)$   $\partial_y G(x, y)$  è nulla ed esistono due possibili funzioni esplicite passanti per l'origine:  $y = x$  e  $y = -x$ ,



- La funzione non è  $\mathcal{C}^1$ : sia

$$G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto x^3 - y^2.$$



In un intorno di  $(0, 0)$   $\partial_y G(x, y)$  è ancora una volta nulla esistono: la funzione esplicita passante per l'origine non è  $\mathcal{C}^1$ .

### 7.3 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA DI DINI

Ricapitolando:

#### OSSERVAZIONI.

1. Il teorema di Dini è di natura *locale*: la funzione  $\varphi(\mathbf{x})$  definita implicitamente da  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  esiste unica solo in un intorno  $I$  di  $\mathbf{x}_0$  e ha per codominio il corrispondente intorno  $J$  di  $\mathbf{y}_0$ .
2. La tesi del teorema garantisce che l'insieme

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} \cap I \times J$$

sia il grafico di una funzione  $\varphi(\mathbf{x})$ : infatti,

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in I \times J : G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{x} \in I, \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})\}.$$

#### 7.3.1 Iperpiano tangente

Sia  $G : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Ancora una volta vogliamo sapere se l'insieme di livello zero di  $G$  è il grafico di una funzione  $y = \varphi(\mathbf{x})$  nell'intorno di un punto  $(\mathbf{x}_0, y_0)$ . Se la funzione  $G$  sta in  $\mathcal{C}^1(A)$ , le ipotesi del teorema di Dini diventano:

$$\begin{cases} G(\mathbf{x}_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0 \end{cases}.$$

Sotto queste ipotesi, l'**iperpiano tangente** al grafico ha equazione:

$$y = y_0 - D_y G^{-1}(\mathbf{x}_0, y_0) D_x G(\mathbf{x}_0, y_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (7.10)$$

ovvero:

$$\begin{aligned} rCl y &= y_0 - D_y G^{-1}(\mathbf{x}_0, y_0) D_x G(\mathbf{x}_0, y_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= y_0 - \frac{1}{\frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0)} \nabla_x G(\mathbf{x}_0, y_0)^T [\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] \\ &= y_0 - \frac{1}{\frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0)} \langle \nabla_x G(\mathbf{x}_0, y_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \nabla_x G(\mathbf{x}_0, y_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0) (y - y_0) = 0.$$

- Se  $n = 1$  si ha una curva regolare di parametrizzazione  $r(t) = t\vec{i} + \varphi(t)\vec{j}$ .

- Se  $n \geq 2$  abbiamo un'ipersuperficie in  $\mathbb{R}^{n+1}$  dotata di un piano tangente in ogni punto  $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{y})$  di equazione

$$\langle \nabla_z G(\bar{\mathbf{z}}), \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}} \rangle = 0 = d_z G[\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}].$$

**OSSERVAZIONE.** Scambiando il ruolo delle variabili, la regolarità dell'insieme di livello è assicurata se  $\nabla_z G(\bar{\mathbf{z}}) \neq 0$ . Infatti, se  $\frac{\partial G}{\partial z_i}(\bar{\mathbf{z}}) \neq 0$ , con  $G(\bar{\mathbf{z}}) = 0$ , basta porre  $y = z_i$  e  $\mathbf{x} = (z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_p)$ . L'insieme di livello zero è dunque un grafico rispetto alla variabile  $y = z_i$  ( $z_i = \varphi(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_p)$ ).

Se  $m \geq 2$  abbiamo due equazioni scalari che corrispondono al sistema:

$$\begin{cases} G_1(\mathbf{x}, y_1, y_2) = 0 \\ G_2(\mathbf{x}, y_1, y_2) = 0 \end{cases} \quad (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

Ovvero intersechiamo due superfici di dimensione  $n + 1$  in  $\mathbb{R}^{p=n+2}$ ; ci aspettiamo di trovare quindi una *superficie di dimensione  $n$*  in  $\mathbb{R}^{n+2}$ . È anche ragionevole aspettarsi che l'iperpiano tangente sia l'intersezione dei due iperpiani tangenti alle due superfici  $n+1$ -dimensionali.

### 7.3.2 Superfici regolari $n$ -dimensionali in $\mathbb{R}^p$

Ma cos'è una superficie? Non è semplice darne una buona definizione: qui proponiamo la seguente:

#### DEFINIZIONE 7.3.1. (SUPERFICIE REGOLARE PARAMETRIZZATA).

Una **superficie regolare parametrizzata** di dimensione  $n$  in  $\mathbb{R}^p$ , con  $p > n$ , è una coppia  $(\Sigma, r)$ , con  $r : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $A$  aperto,  $r \in C^1$  e tale che la Jacobiana  $J_r(t_1, \dots, t_n)$  abbia rango massimo  $\forall (t_1, \dots, t_n) \in A$  e  $\Sigma = r(A)$ .

**OSSERVAZIONE.** La definizione data ha senso, poiché al variare di  $(t_1, \dots, t_n) \in A$  il punto  $r(t_1, \dots, t_n) \in A$  descrive un insieme in  $\mathbb{R}^p$  e la richiesta che  $J_r(t_1, \dots, t_n)$  abbia rango massimo garantisce che i vettori  $(\frac{\partial r}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial t_n})$  siano linearmente indipendenti e formino una base di un iperpiano di dimensione  $n$  in  $\mathbb{R}^p$ .

L'**iperpiano tangente** nel punto  $\mathbf{z}_0 = r(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$  ha equazione parametrica:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + J_r(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \begin{bmatrix} t_1 - \bar{t}_1 \\ \vdots \\ t_n - \bar{t}_n \end{bmatrix}.$$

### 7.3.3 Superfici cartesiane

Un caso particolare è quello di superficie cartesiana in cui i parametri variano in un sottospazio  $\mathbb{R}^n$  di  $\mathbb{R}^p$ . Sia  $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  e, data la parametrizzazione  $r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$  esista una funzione  $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  tale che

$$r(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \varphi(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Avremo quindi che

$$J_r(x) = \begin{pmatrix} & & I_n & & \\ & & & & \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & & \vdots & \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} & \end{pmatrix}.$$

L'immagine  $\Sigma = r(A)$  è il grafico della funzione  $\varphi(\mathbf{x})$ . Il grafico di  $\varphi(\mathbf{x})$  ha come spazio tangente il grafico del differenziale di

$$\varphi(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}_0) + d_{x_0} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\}.$$

Un classico esempio di superficie cartesiana è il *grafico di una funzione*  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^3$ .

**COROLLARIO 7.3.I. (SUPERFICI REGOLARI PER IL TEOREMA DI DINI).**

*Nelle ipotesi del teorema di Dini, l'insieme*

$$\Sigma = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} \cap I \times J$$

*è una superficie regolare  $n$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^{n+m}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\varphi(\mathbf{x})$  è la funzione implicitamente definita da  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  come nel teorema di Dini, allora l'applicazione (7.II) è una parametrizzazione di classe  $\mathcal{C}^1$  di  $\Sigma$  e  $J_r(\bar{\mathbf{x}})$  ha rango massimo  $n$ ,  $\forall \bar{\mathbf{x}} \in I$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE.** La varietà lineare (o iperspazio) tangente ( $n$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ) nel punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Sigma$  è a sua volta un grafico ed ha equazione

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} - \overbrace{D_y G^{-1}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})}^{J_{\varphi(\bar{\mathbf{x}})}} D_x G(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\} \\ &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : D_y G(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) + D_x G(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = 0\} \\ &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+m} : J_G(\bar{\mathbf{z}})(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) = 0\} \\ &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+m} : d_{\bar{\mathbf{z}}} G(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) = 0\}. \end{aligned}$$

#### 7.3.4 Scambio delle coordinate

Il teorema di Dini spesso viene utilizzato come segue:

**TEOREMA 7.3.I. (SCAMBIO DELLE COORDINATE).**

Sia  $G: A \subseteq \mathbb{R}^{p=n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  di classe  $\mathcal{C}^1(A)$ ,  $A$  aperto e sia  $\bar{z} \in \mathbb{R}^p$  tale che:

1.  $G(\bar{\mathbf{z}}) = 0$ ;
2.  $J_G(\bar{\mathbf{z}})$  ha rango massimo  $m$ .

Allora in un intorno di  $\bar{\mathbf{z}}$  l'equazione  $G(\mathbf{z}) = 0$  definisce un'ipersuperficie regolare di dimensione  $n$ , il cui iperpiano tangente, in ogni punto, è dato dall'equazione  $d_{\bar{\mathbf{z}}} G(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) = J_G(\bar{\mathbf{z}})(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) = 0$ , cioè  $\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}} \in \ker(d_{\bar{\mathbf{z}}} G)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $J_G(\bar{\mathbf{z}}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$  - che generalmente *non* è quadrata - ha rango massimo, allora esiste una sottomatrice quadrata di ordine  $m$  invertibile: la matrice

$$J_G(\bar{\mathbf{z}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial z_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial z_p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial z_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial z_p} \end{pmatrix}$$

ha  $m$  vettori colonna  $\frac{\partial G}{\partial z_{i_1}}, \dots, \frac{\partial G}{\partial z_{i_m}}$  linearmente indipendenti. Indichiamo con  $y_1, \dots, y_m$  le  $m$  variabili  $z_{i_1}, \dots, z_{i_m}$  corrispondenti e  $x_1, \dots, x_n$  le rimanenti. Possiamo parametrizzare  $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} \cap I \times J$  grazie al corollario 7.3.I con

$$r(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varphi(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

dove  $\varphi(\mathbf{x})$  è la funzione implicita. □

#### 7.4 TEOREMA D'INVERSIONE LOCALE

##### TEOREMA 7.4.I. (INVERSIONE LOCALE).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $h : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $\mathcal{C}^1(A)$  e siano  $\mathbf{x}_0 \in A, \mathbf{y}_0 = h(\mathbf{x}_0)$ . Supponiamo che  $J_h(\mathbf{x}_0)$  sia invertibile. Allora esistono  $I$  intorno di  $\mathbf{x}_0$ ,  $J$  intorno<sup>a</sup> di  $\mathbf{y}_0$  e un'unica funzione  $\varphi \in \mathcal{C}^1(J; I)$  tale che

1.  $h(I) \supseteq J$ ;
2.  $h(\varphi(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in J; \quad \varphi(h(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in I$ ;
3.  $J_\varphi(\mathbf{y}) = (J_h(\mathbf{x}))^{-1}$ ;
4.  $x = \varphi(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in J$ ;

<sup>a</sup>L'immagine di una palla aperta centrata in  $\mathbf{x}_0$  non è necessariamente una palla aperta centrata in  $f(\mathbf{x}_0)$  - si consideri  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$  - quindi riteniamo opportuno formulare il teorema in termini di intorni qualsiasi piuttosto che con le palle aperte.

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo la funzione  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$ . Abbiamo:

- $G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$ ;
- $D_x G(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = J_h(\mathbf{x}_0)$  è invertibile.

Applichiamo il teorema di Dini con le variabili scambiate e risolviamo  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  rispetto a  $\mathbf{x}$ . La funzione implicitamente definita da  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  risolve  $G(\varphi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$  se e solo se  $\mathbf{y} = h(\varphi(\mathbf{y}))$ , cioè  $\varphi(\mathbf{y})$  è la funzione inversa di  $h$ . Quindi abbiamo  $J$  intorno di  $\mathbf{y}_0$ ,  $I$  intorno di  $\mathbf{x}_0$  e una funzione  $\varphi : J \rightarrow I$  tale che:

- $\mathbf{y} = h(\mathbf{x}); (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in J \times I \iff \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y});$
- $\varphi(J) \subseteq I \iff h(I) \supseteq J.$

Se vogliamo che  $\varphi(\mathbf{y})$  sia biettiva dobbiamo considerare  $h^{-1}(J) = V \subseteq I$  in modo tale che  $\varphi : J \rightarrow V$  sia la funzione inversa di  $h|_V : V \rightarrow J$ . □

##### DEFINIZIONE 7.4.I. (OMEOMORFISMO).

Siano  $X, Y$  due spazi topologici. Una mappa  $h : X \rightarrow Y$  biunivoca, continua e con inversa continua si dice **omeomorfismo**.



**DEFINIZIONE 7.4.2. (DFFEOMORFISMO).**

Siano  $V, W$  due aperti di  $\mathbb{R}^n$ . Una mappa  $h : V \rightarrow W$  biunivoca, di classe  $\mathcal{C}^1$  e con inversa di classe  $\mathcal{C}^1$  si dice **diffeomorfismo**.

**OSSERVAZIONE.** Nelle ipotesi del teorema 7.4.1 d'inversione locale esistono  $V, W$  intorno di  $x_0$  e  $y_0$  rispettivamente tali che  $h|_V : V \rightarrow W$  è un diffeomorfismo.

# OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

---

*“E adesso sono bitter dicks, come dicono gli inglesi. La traduzione però non ve la faccio.”*

ALESSANDRO IACOPETTI, *anglofono.*

LA RICERCA di massimi e minimi di una funzione in un sottoinsieme del suo dominio ha grandissima importanza, sia da un punto di vista puramente matematico ma anche per le varie applicazioni in altri campi quali la fisica e l'economia.

## 8.1 MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Iniziamo la trattazione con un esempio. Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 - 3y \end{aligned} \quad (8.1)$$

Supponiamo di volerne studiare i punti di massimo e minimo nell'insieme

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0 \right\},$$

detto “vincolo”. Prima di cominciare, osserviamo che il massimo e il minimo di  $f$  in  $C$  esistono grazie alla seguente catena di implicazioni:

$$\begin{array}{l} C \text{ chiuso} \\ \text{e limitato} \end{array} \implies \begin{array}{l} C \text{ compatto} \\ f \text{ continua} \end{array} \implies \begin{array}{l} f \text{ ammette massimo e minimo in } C \\ \text{per il teorema di Weierstrass} \end{array} \quad (8.2)$$

Il vincolo  $C$  è un'ellisse di centro  $(0, 0)$ , che può essere dunque parametrizzata nel seguente modo:

$$r(t) = 2 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Il problema iniziale di ottimizzazione vincolata può essere quindi risolto cercando gli estremi della funzione

$$\begin{aligned} \varphi = f \circ r : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 4 \cos^2 t - 9 \sin t \end{aligned}$$

Derivando, otteniamo

$$\varphi'(t) = -8 \cos t \sin t - 9 \cos t = -\cos t(9 + 8 \sin t).$$

Il segno di  $\varphi'$  dipende solo da  $-\cos t$ , essendo  $9 + 8 \sin t > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . Dallo studio del segno della derivata deduciamo che  $\varphi$  ha un punto di massimo in  $t = \frac{3\pi}{2}$  e di minimo in  $t = \frac{\pi}{2}$ :

$$\varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \max_{t \in [0, 2\pi]} \varphi(t) = 9; \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \min_{t \in [0, 2\pi]} \varphi(t) = -9.$$

Per trovare i due punti di estremo vincolati in  $\mathbb{R}^2$  calcoliamo  $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 3)$  e  $r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -3)$ .

#### OSSERVAZIONI.

- Siamo stati in grado di determinare i punti estremanti di  $f$  in  $C$  poiché  $C$  è un sottoinsieme *compatto* di  $\mathbb{R}^2$ .
- Il vincolo  $C$  è il *sostegno di una curva regolare* in  $\mathbb{R}^2$ , dotata in ogni punto di un versore tangente  $T = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ , dove

$$r'(t) = -2 \sin t \vec{i} + 3 \cos t \vec{j}; \quad \|r'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**NOTAZIONE.** Per facilitare la lettura i vettori all'interno dei capoversi sono espressi come *vettori riga* e, ove non necessario, ometteremo di indicare la trasposizione. Ricordiamo che nel calcolo effettivo i vettori sono sempre considerati *vettori colonna*.

Osserviamo che la condizione *necessaria* di estremalità, ovvero l'annullamento della derivata di  $\varphi$ , può essere espressa come

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle = 0$$

Ne consegue che il vettore  $\nabla f(r(t))$  deve essere *ortogonale* al versore  $T$ . Nell'esempio precedente si ha che nel punto di massimo  $(0, 3)$  il versore della derivata della parametrizzazione  $T\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0)$  è ortogonale a  $\nabla f(0, 3) = (0, -3)$ . L'insieme di livello 0 di  $g$  è regolare: il vettore tangente  $T$  è ortogonale in ogni punto a  $\nabla g(x, y)$ .

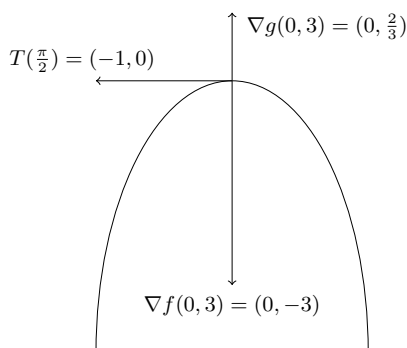


FIGURA 8.1 – Posizioni reciproche di  $T, \nabla g$  e  $\nabla f$  in  $(0, 3)$ .

In definitiva, la condizione necessaria di estremalità è che  $\nabla f(x, y)$  e  $\nabla g(x, y)$  siano *paralleli*; la regolarità della curva  $g$  che definisce il vincolo garantisce che  $\nabla g(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \text{Dom}g(x, y)$ . Siamo quindi indotti a esprimere la condizione di parallelismo come

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad (8.3)$$

Il valore  $\lambda$  prende il **moltiplicatore di Lagrange**. Riprendiamo ora l'esempio (8.1), ma questa volta vogliamo determinare il massimo e il minimo di  $f$  rispetto a

$$C_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \leq 0 \right\} :$$

Il vincolo  $C_2$  si tratta ancora di un insieme compatto, quindi vale la catena di implicazioni (8.2). Supponiamo che uno dei punti due di massimo o di minimo sia interno a  $C$ : in quel punto dovremmo avere  $\nabla(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ . In questo caso, essendo  $\nabla f(x, y) = (2x, -3) \neq (0, 0)$ , ciò non è possibile e quindi  $f$  con il vincolo  $C_2$  ha gli stessi punti di massimo e minimo di  $f$  con  $C$ .

**OSSERVAZIONE.** In generale, il problema dell'ottimizzazione su un insieme vincolato con una disuguaglianza si risolve trattando separatamente la *parte interna* del vincolo e la sua *frontiera*: dato un vincolo  $C$  si studiano quindi i punti di massimo e di minimo su  $\partial C$  e, se  $C$  è definito con una disuguaglianza, si studiano i punti di  $C^\circ$  in cui  $\nabla f$  si annulla. Il massimo (minimo) cercato sarà quindi il "massimo (minimo) dei massimi (minimi)" in  $\partial C$  e  $C^\circ$ .

Formalizziamo e generalizziamo su  $\mathbb{R}^n$  i concetti che abbiamo incontrato finora.

**DEFINIZIONE 8.1.1. (MASSIMO, MINIMO VINCOLATI; VINCOLO).**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $C \subset A$ . Diciamo che  $\bar{\mathbf{x}} \in C$  è **punto di massimo (risp. minimo) di  $f$  vincolato o condizionato a  $C$**  se  $f(\mathbf{x}) \leq f(\bar{\mathbf{x}})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in C$  (risp.  $f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in C$ ). Un punto di massimo o minimo vincolato viene detto punto di **estremo di  $f$  condizionato o vincolato**.  $C$  si dice **vincolo**.

**OSSERVAZIONI.**

- I punti di estremo di  $f$  vincolato a  $C$  non sono altro che i punti di estremo di  $f|_C$ .
- I vincoli possono essere più di uno;

**DEFINIZIONE 8.1.2. (PUNTO REGOLARE, SINGOLARE).**

Sia  $G : A \subseteq \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , ( $p \geq m$ ),  $G \in \mathcal{C}^1(A; \mathbb{R}^m)$ ,  $A$  aperto. Un punto  $\bar{\mathbf{x}} \in G^{-1}(0)$  si dice **regolare** per l'insieme  $C = G^{-1}(0)$  se  $J_G(\bar{\mathbf{x}})$  ha rango massimo, cioè  $m$ . Il vincolo  $C$  si dice regolare se ogni suo punto è regolare. Un punto non regolare si dice **singolare**.

**OSSERVAZIONE.** Se  $m = 1$  la condizione di regolarità si riduce a  $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$ .

**ESEMPIO.** Consideriamo la funzione

$$g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4, \quad C = g^{-1}(0)$$

Otteniamo facilmente che  $\nabla g(x, y) = (x, y - y^3)$ :  $g$  ha quindi tre punti critici  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$  e solo  $(0, 0) \in g^{-1}(0)$ . Di conseguenza,  $(0, 0)$  è l'unico punto singolare dell'insieme di livello zero  $g^{-1}(0)$ . Osserviamo che tutti i punti sono regolari e posseggono un versore tangente eccetto l'origine.

La caratteristica principale dei punti regolari è che in un loro intorno l'equazione  $g(x) = 0$  definisce una ipersuperficie  $(p-m)$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^p$ , dotata in ogni punto di un piano

tangente:

$$\pi = \left\{ h \in \mathbb{R}^p : \langle \nabla g(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h} - \bar{\mathbf{x}} \rangle = d_{\bar{\mathbf{x}}}g[\mathbf{h} - \bar{\mathbf{x}}] = \langle \nabla g(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{v} \rangle = 0 \right\}.$$

Come già visto nel teorema 7.3.1, in base al *teorema di Dini* tale superficie può essere parametrizzata con una funzione  $r : I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , con  $n = p - m$ , di classe  $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^m)$ . I vettori

$$\left( \frac{\partial r}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial t_n} \right)$$

sono  $n$  vettori linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}^m$  e generano l'iperspazio tangente in ogni punto.

## 8.2 CONDIZIONI NECESSARIE PER L'ESTREMALITÀ VINCOLATA

### DEFINIZIONE 8.2.1. (PUNTO CRITICO VINCOLATO O CONDIZIONATO).

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $f \in \mathcal{C}^1(A; \mathbb{R})$  e sia  $G : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  dove<sup>a</sup>  $m < p$  e  $G \in \mathcal{C}^1(A; \mathbb{R}^m)$ ; sia  $C = G^{-1}(0) \subseteq A$  il vincolo. Un punto  $\bar{\mathbf{x}} \in C$  si dice **punto critico di  $f$  vincolato o condizionato a  $C$**  se:

1.  $\bar{\mathbf{x}}$  è regolare per il vincolo, ovvero  $J_G(\bar{\mathbf{x}})$  ha rango massimo;
2. Per ogni vettore  $\mathbf{h}$  tangente al vincolo in  $\bar{\mathbf{x}}$ ,  $\langle \nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h} \rangle = 0$ .

<sup>a</sup>Se fosse  $p = m$  il vincolo si ridurrebbe a un punto!

**OSSERVAZIONE.** Se  $m = 1$  la regolarità di  $\bar{\mathbf{x}}$  si riduce a  $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$  e la condizione 2. equivale a  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda \nabla g(\bar{\mathbf{x}})$ , ossia  $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \in \ker(d_{\bar{\mathbf{x}}}g)$  essendo  $\ker(d_{\bar{\mathbf{x}}}g)$  lo spazio tangente. Infatti, sia  $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$  che  $\nabla g(\bar{\mathbf{x}})$  sono ortogonali all'iperspazio tangente in  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Se  $m \geq 2$ , possiamo estendere quest'ultimo concetto, formalizzando quella intuizione che abbiamo già accennato in (8.3):

### TEOREMA 8.2.1. (DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE).

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $f \in \mathcal{C}^1(A; \mathbb{R})$  e sia  $G : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m < p$ ,  $G \in \mathcal{C}^1(A; \mathbb{R}^m)$ . Se  $\bar{\mathbf{x}}$  è un punto critico di  $f$  condizionato al vincolo  $G(\mathbf{x}) = 0$ , allora dato

$$G(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} g_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ g_m(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}$$

esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  tali che

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}).$$

I coefficienti  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  prendono il nome di **moltiplicatori di Lagrange**.

**DIMOSTRAZIONE.** Per provare il teorema è sufficiente mostrare che i vettori

$$(\nabla g_1(\bar{\mathbf{x}}), \dots, \nabla g_m(\bar{\mathbf{x}}))$$

formano una base in  $\mathbb{R}^{p-m+n}$  del complemento ortogonale dell'iperpiano tangente; infatti, essendo anche  $\nabla f$  ortogonale all'iperpiano tangente necessariamente si avrà la (8.2.1). Per quanto già visto in (7.3.4) l'iperpiano tangente ha equazione  $J_G(\bar{\mathbf{x}})[\mathbf{h}] = 0$  ed ha dimensione

$n = p - m$ . I vettori  $\mathbf{h}$  verificano

$$J_G(\bar{\mathbf{x}})[\mathbf{h}] = 0 \iff \langle \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h} \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Lo spazio tangente è quindi  $T = \ker d_G(\bar{\mathbf{x}})$  ed è ortogonale a tutti i  $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$ . Inoltre, i vettori  $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$  sono linearmente indipendenti tra loro poiché  $J_G(\bar{\mathbf{x}})$  ha rango  $m$ . Deduciamo dunque che

$$\mathbb{R}^p = T \oplus \mathcal{L}(\nabla g_1(\bar{\mathbf{x}}), \dots, \nabla g_m(\bar{\mathbf{x}})):$$

ogni vettore ortogonale allo spazio tangente  $T$  è combinazione lineare di  $\nabla g_1(\bar{\mathbf{x}}), \dots, \nabla g_m(\bar{\mathbf{x}})$ . Poiché, come già osservato, anche  $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$  è ortogonale a  $T$ , concludiamo che esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  tali che valga (8.2.1).  $\square$

**TEOREMA 8.2.2. (LEGAME TRA PUNTI REGOLARI E CRITICI).**

Siano  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto e  $G : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$  due funzioni di classe  $\mathcal{C}^1$  e sia  $\bar{\mathbf{x}}$  un punto di estremo di  $f$  condizionato al vincolo  $G(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ . Supponiamo inoltre che  $\bar{\mathbf{x}}$  sia un punto regolare del vincolo. Allora  $\bar{\mathbf{x}}$  è un punto critico di  $f$  vincolato a  $G^{-1}(0)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per ipotesi  $\bar{\mathbf{x}}$  è un punto regolare del vincolo, cioè  $J_G(\bar{\mathbf{x}})$  ha rango massimo. Il corollario del teorema di Dini (7.3.1) garantisce l'esistenza di un intorno di  $\bar{\mathbf{x}}$  per cui  $G^{-1}(0) \cap I \times J$  è una superficie regolare  $n$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^p$ . In particolare, esiste una parametrizzazione

$$\begin{aligned} r : I \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto r(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

tale che  $J_r(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$  ha rango massimo  $n$  e  $r(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = \bar{\mathbf{x}}$ . I vettori

$$\left( \frac{\partial r}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial t_n} \right)$$

sono linearmente indipendenti e formano una base dello spazio tangente. Consideriamo la funzione composta  $\varphi = f \circ r : I \longrightarrow \mathbb{R}$ : osserviamo che  $r(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = \bar{\mathbf{x}}$  è un punto di estremo interno a  $I$ . Quindi  $\nabla \varphi(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = (0, \dots, 0)$ , cioè  $\frac{\partial}{\partial t_i}(f \circ r)(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ , e ciò implica

$$\left\langle \nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \frac{\partial r}{\partial t_i}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \right\rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Dato  $\mathbf{h}$  versore dello spazio tangente, si ha che

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial r}{\partial t_i}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n),$$

quindi  $\langle \nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{h} \rangle = 0$ . Abbiamo mostrato che se  $\bar{\mathbf{x}}$  è un punto critico di  $f$  vincolato a  $G(x) = 0$  allora  $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$  è ortogonale allo spazio tangente al vincolo in  $\bar{\mathbf{x}}$ :  $\bar{\mathbf{x}}$  soddisfa la Definizione 8.2.1 di punto critico vincolato.  $\square$

### 8.2.1 Ottimizzazione di una forma quadratica vincolata a una sfera

Sia

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

con  $A$  matrice simmetrica associata alla forma quadratica  $f$ . Consideriamo come vincolo la sfera  $S^{n-1}$  in  $\mathbb{R}^n$  centrata nell'origine di raggio 1, che possiamo descrivere con la funzione

$$g(x) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 - 1 = \frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2) - 1.$$

Osserviamo immediatamente che il vincolo è regolare poiché il gradiente della funzione descrivente il vincolo è

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in S^{n-1}.$$

I punti critici di  $f$  vincolati a  $S^{n-1}$  sono quei  $\bar{\mathbf{x}}$  tali che  $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$  è parallelo a  $\nabla g(\bar{\mathbf{x}})$ , ossia tali che  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda \nabla g(\bar{\mathbf{x}})$ . Calcoliamo  $\nabla f(\mathbf{x})$  utilizzando il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{h}\|} &= \frac{1}{2\|\mathbf{h}\|} \langle A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}), \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \rangle - \frac{1}{2\|\mathbf{h}\|} \langle A\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2\|\mathbf{h}\|} \langle A\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{1}{2\|\mathbf{h}\|} \langle A\mathbf{x}_0, \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2\|\mathbf{h}\|} \langle A\mathbf{h}, \mathbf{x}_0 \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2\|\mathbf{h}\|} \langle A\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle - \frac{1}{2\|\mathbf{h}\|} \langle A\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \langle A\mathbf{x}_0, \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2\|\mathbf{h}\|} \langle A\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \\ &\leq \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \langle A\mathbf{x}_0, \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2\|\mathbf{h}\|} \|A\mathbf{h}\| \|\mathbf{h}\| \xrightarrow{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} A\mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Ricapitolando,  $\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ : la condizione

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda \nabla g(\bar{\mathbf{x}})$$

del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange diventa

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : A\bar{\mathbf{x}} = \lambda \bar{\mathbf{x}}$$

I punti fissi  $\bar{\mathbf{x}}$  di  $f$  vincolata a  $g$  sono gli autovettori di  $A$  e  $\lambda$  sono i rispettivi autovalori!

## 8.3 METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE: APPLICAZIONI

### 8.3.1 Autovalori di matrici simmetriche

Le ultime osservazioni ci inducono ad approfondire la relazione tra il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e la determinazione degli autovalori di una matrice simmetrica reale. A partire da questa relazione si può in effetti dimostrare una delle formulazioni equivalenti del Teorema spettrale.

#### **TEOREMA 8.3.1. (SPETTRALE PER MATRICI SIMMETRICHE REALI).**

Data una matrice simmetrica reale  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , esistono  $n$  autovalori reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  contati con

molteplicità e  $n$  autovettori  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  tali che

$$A\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad e \quad \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A = A^T$  e sia

$$f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Consideriamo come vincolo per la funzione  $f$  la sfera  $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ , descritta dall'equazione  $g_1(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 1$ . Calcoliamo i gradienti:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x} \quad e \quad \nabla g_1(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$$

Chiaramente  $g_1$  è un vincolo regolare, in quanto  $2\mathbf{x} \neq 0, \forall \mathbf{x} \in g_1^{-1}(0)$ . Inoltre:

- $S^{n-1} = g_1^{-1}(\{0\})$  è controimmagine di un chiuso di  $\mathbb{R}^n$  ed è quindi anch'essa chiusa;
- $S^{n-1} \subseteq B_{1+\epsilon}(0)$  è limitata<sup>a</sup>;

Quindi  $S^{n-1}$  è compatta e si può applicare il *Teorema di Weierstrass* che garantisce l'esistenza di un massimo e di un minimo. Possiamo dunque usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g_1(\mathbf{x}) \implies \cancel{2}A\mathbf{x} = \lambda \cancel{2}\mathbf{x} \implies A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \iff \mathbf{x} \text{ è un autovettore di } A.$$

Osserviamo inoltre che

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \implies \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda \underbrace{\|\mathbf{x}\|^2}_{=1} \implies f(\mathbf{x}) = \lambda.$$

Poniamo<sup>b</sup>  $\mu_1 := \min_{\|\mathbf{x}\|^2=1} f(\mathbf{x})$ . Come possiamo trovare gli altri autovalori? Studiamo per un momento il caso  $n = 2$ . In  $\mathbb{R}^2$  l'espressione della forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad f(x, y) = ax^2 + 2bxy + y^2.$$

Osserviamo che  $f(1, 0) = ax^2$ , ovvero  $(1, 0)$  è un autovettore dell'autovalore  $\mu_1 = a$ . Se estendiamo questa intuizione in  $\mathbb{R}^n$ , possiamo supporre che il primo autovalore sia in corrispondenza del vettore  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Per trovare il prossimo autovalore si può quindi imporre l'ortogonalità con il vettore  $\mathbf{e}_1$ . Definiamo

$$g_2(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle; \quad G_2(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\|^2 - 1 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \end{pmatrix}; \quad J_{G_2}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2\mathbf{x}^T \\ \mathbf{e}_1^T \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che  $\text{rank}(J_{G_2}(\mathbf{x})) = 2 \forall \mathbf{x} \in S^{n-1}$  quindi il vincolo  $G_2(\mathbf{x})$  è regolare, chiuso - in quanto intersezione di chiusi - e limitato. Definiamo  $\mu_2 := \min_{G_2(\mathbf{x})=0} f(\mathbf{x})$  e applichiamo ancora una volta il *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange*: sia  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 = 1$  tale che  $\langle \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$ ; esistono  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) &= \lambda_1 \nabla g_1(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{\mathbf{x}}); \\ 2A\bar{\mathbf{x}} &= 2\lambda_1 \bar{\mathbf{x}} + \lambda_2 \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$



Moltiplicando per  $\mathbf{e}_1$ :

$$\begin{aligned} \text{ric} \langle 2A\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_1 \rangle &= 2 \langle \lambda_1 \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \lambda_2 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \\ 2 \langle A\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_1 \rangle &= 0 + \lambda_2 \\ 2 \langle \bar{\mathbf{x}}, \overbrace{A^T}^{\text{=A}} \mathbf{e}_1 \rangle &= \lambda_2 \\ 2 \langle \bar{\mathbf{x}}, \mu_1 \mathbf{e}_1 \rangle &= \lambda_2 \implies \lambda_2 = 0 \text{ essendo } \bar{\mathbf{x}} \text{ ortogonale a } \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Il nuovo vincolo  $G_2(\mathbf{x})$  è **naturale**, ovvero *non* produce altri moltiplicatori di Lagrange. Continuando induttivamente avremo al passo  $k$ :

- $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$  vettori ortogonali tra loro;
- $A\mathbf{e}_i = \mu_i \mathbf{e}_i$ ;
- $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k$ .

Se  $k = n$  il processo termina, altrimenti, definiamo

$$G_{k+1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\|^2 - 1 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \end{pmatrix} \quad \mu_1 := \min_{G_{k+1}(\mathbf{x})=0} f(\mathbf{x}).$$

Osserviamo che  $G_{k+1}(\mathbf{x}) = 0 \implies G_k(\mathbf{x}) = 0 \implies \dots G_2(\mathbf{x}) = 0 \implies \|\mathbf{x}\|^2 = 1$ , ovvero il vincolo di ogni passo è un sottoinsieme del vincolo del passo precedente. Perciò  $\mu_{k+1} \geq \mu_k \geq \dots \geq \mu_1$  e gli autovalori  $\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_1$  sono ortogonali tra loro per costruzione.  $\square$

<sup>a</sup>Nel caso in cui  $n$  fosse infinito, ossia se stessimo lavorando con spazi vettoriali infiniti, la sfera risulterebbe totalmente limitata; ciò è comunque sufficiente per usare il *Teorema di Weierstrass*.

<sup>b</sup>Per evitare confusione, indichiamo con  $\mu_n$  gli autovalori e  $\lambda_n$  i moltiplicatori di Lagrange.

Il vantaggio di questa dimostrazione è il fatto di poter applicare il teorema a spazi di dimensione infinita!

### 8.3.2 Differenza tra media aritmetica e geometrica

Cerchiamo di massimizzare la funzione

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

vincolata all'insieme

$$C = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

L'insieme  $C$  è l'intersezione di un iperpiano con l'iperottante positivo ed è detto **simpleso**. Poiché  $C$  è compatto e  $f(\mathbf{x})$  è continua, essa ammette massimo e minimo in  $C$ . Osserviamo che se  $\exists x_i : x_i = 0$  allora  $f(\mathbf{x}) = 0$  e  $\mathbf{x}$  non sarà sicuramente il massimo: possiamo quindi escludere che il massimo si trovi sul bordo di  $C$ . Consideriamo quindi l'aperto

$$A = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

e la funzione

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - 1.$$

Calcoliamo i gradienti...

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{n} x_i^{\frac{1}{n}-1} = \frac{f(x)}{n x_i}; \quad \nabla g = \frac{1}{n} (1, \dots, 1)$$

...e applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x}) \\ g(\bar{x}) = 0 \end{cases} .$$

Ossia

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda \nabla g(\bar{\mathbf{x}}) \iff \frac{f(\bar{\mathbf{x}})}{n \bar{x}_i} = \frac{\lambda}{n} \iff \bar{x}_i = \frac{f(\bar{\mathbf{x}})}{\lambda} \quad \forall i = 1, \dots, n \\ g(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \iff \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i - 1 = 0 \iff \bar{x}_i = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Il massimo di  $f$  in  $C$  si ha in  $(1, \dots, 1)$  e ha valore  $f(1, \dots, 1) = 1$ : in  $C$ , si ha  $f(\mathbf{x}) \leq 1$ .  
Ricapitolando, sappiamo che:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \leq 1 \iff (x_1, \dots, x_n)^{\frac{1}{n}} \leq 1 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1 . \end{cases}$$

Possiamo allora concludere che

$$(x_1, \dots, x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$

Se  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = M \neq 1$  con un procedimento analogo si ha

$$\max_{C_M} f = f(M, \dots, M) = M \implies \frac{1}{M} \left( \prod_{i=1}^n \bar{x}_i \right)^{\frac{1}{n}} = 1 .$$

Sapendo anche che  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1$  possiamo concludere nuovamente che

$$(x_1, \dots, x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$



# IV

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI E INTEGRALI MULTIPLI



# EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

*“Le equazioni differenziali le risolve qualcun altro.”*

ALBERTO ALBANO, *che non è un professore di analisi.*

CON BUONA pace degli eleati, incontriamo continuamente fenomeni che variano in funzione del tempo, dello spazio e/o di qualunque altra cosa, che siamo in grado di tradurre in un modello matematico più o meno agevolmente, a seconda dei casi. Ma come possiamo descrivere un fenomeno, una quantità che varia in funzione della quantità stessa, come la crescita di una popolazione? Necessitiamo di uno strumento matematico per descrivere questo tipo di situazione: le **equazioni differenziali**.

**ESEMPIO.** Consideriamo un'automobile che in un istante  $t$  ha una velocità  $\mathbf{v}(t)$ . Chiamando  $\mathbf{y}(t)$  la funzione che associa ad ogni istante una posizione, abbiamo che

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{v}(t)$$

ma questo è vero se e solo se

$$\mathbf{y}(t) = \int_a^t \mathbf{v}(s) ds + \mathbf{c}.$$

Dunque possiamo sapere esplicitamente la posizione della macchina dal modo in cui varia.

## **DEFINIZIONE 9.0.1. (EQUAZIONE DIFFERENZIALE).**

Definiamo **equazione differenziale** una relazione che lega una variabile  $t$ , una funzione in  $y(t)$  e le sue derivate:

$$G(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \tag{9.1}$$

In particolare diremo che un'equazione differenziale è:

- **ordinaria (EDO)** se l'incognita è una funzione di una sola variabile;

- **alle derivate parziali (EDP)** se l'incognita è una funzione di più variabili;
- **di ordine  $n$**  se  $n$  è l'ordine massimo di derivazione da cui dipende la funzione incognita;
- **in forma normale** se può essere esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo:

$$y^{(n)}(t) = G(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

**NOTAZIONE.** Nel seguito, se non ci sarà ambiguità, ometteremo spesso di indicare la dipendenza di  $y$  da  $t$  per alleggerire la notazione

In questo corso ci occuperemo soltanto di equazioni differenziali ordinarie.

**DEFINIZIONE 9.0.2. (SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA).**

Una **soluzione** di un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$  è una funzione  $\bar{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  derivabile  $n$  volte in  $I$ , e tale che, data (9.1), si abbia

$$G(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t), \dots, \bar{y}^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

**OSSERVAZIONE.** Un'equazione differenziale ordinaria ammette spesso una *famiglia di funzioni* come soluzione. Nel caso di un'equazione del primo ordine in forma normale del tipo  $y'(t) = h(t)$ , imporre  $y(a) = b$  determina un'unica soluzione; in generale, un'equazione differenziale di ordine  $n$  necessita di  $n$  condizioni per avere una soluzione unica.

**ATTENZIONE!** Risolvere un'equazione differenziale ordinaria può essere molto difficile: studieremo spesso le caratteristiche delle possibili soluzioni di un'equazione differenziale *senza avere averne determinata una esplicitamente*.

## 9.1 ESEMPI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

### 9.1.1 Dinamica classica

In un sistema inerziale, ovvero in un sistema in cui valgono le equazioni della dinamica newtoniana, il moto di un corpo è descritto tramite equazioni differenziali ordinarie: avendo l'accelerazione<sup>1</sup>  $\ddot{\mathbf{x}}$  in funzione del tempo  $t$  possiamo ricavare lo spostamento  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(t) &= f(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \int_a^t f(s) ds + \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{x}(t) &= \int_a^t \int_a^s f(\tau) d\tau ds + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \end{aligned}$$

Coerentemente con quanto già osservato, constatiamo che per determinare univocamente la posizione di un corpo in un dato momento  $t$  necessitiamo di due condizioni  $\mathbf{c}_1$  e  $\mathbf{c}_2$ : la posizione e la velocità in un dato istante  $\bar{t}$ .

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\bar{t}) = \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{x}}(\bar{t}) = \mathbf{v} \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{c}_1 = \mathbf{v} \\ \mathbf{c}_2 = \mathbf{x}(\bar{t}) - \mathbf{v}\bar{t} = \mathbf{b} - \mathbf{v}\bar{t} \end{cases}.$$

<sup>1</sup>Qui usiamo la notazione di Newton, spesso usata in Fisica, per la derivata seconda rispetto al tempo.

## 9.1.2 Esempio: Modello di Malthus

Il *modello di Malthus* è un classico esempio di equazione differenziale ordinaria.

**DEFINIZIONE 9.1.1. (MODELLO DI MALTHUS).**

Un'equazione della forma

$$y'(t) = ky(t) \quad k \in \mathbb{R}$$

è detta **malthusiana**, ed è altresì noto come **modello o equazione di Malthus**.

Il modello prende il nome dall'economista *Thomas Robert Malthus* (1766-1834), che per primo cercò rappresentare matematicamente la variazione di una popolazione per unità di tempo in funzione del numero dei suoi individui. Se chiamiamo:

- $\nu$  il tasso di natalità per individuo per unità di tempo;
  - $\mu$  il tasso di mortalità per individuo per unità di tempo;
  - $\varepsilon = \nu - \mu$  il tasso di variazione della popolazione per individuo per unità di tempo;
- otteniamo un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti

$$y'(t) = \varepsilon y(t) = \nu(t)y - \mu(t)y$$

di cui possiamo cercare una soluzione. Osserviamo che

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \varepsilon = \frac{d}{dt} \log |y(t)| \iff \log |y(t)| = \varepsilon t + c \iff |y(t)| = e^c e^{\varepsilon t}$$

ossia

$$|y(t)| = ke^{\varepsilon t}$$

con  $e^c = k > 0$ , ovvero

$$y(t) = \pm ke^{\varepsilon t}$$

Poniamo dunque  $\pm k = K$  costante di segno variabile. Questo procedimento è molto comune e lo incontreremo nuovamente: qui e nel seguito, se non specificato diversamente,  $K$  sarà una costante reale di segno variabile. Concludiamo che  $y(t) = Ke^{\varepsilon t}$  è una soluzione.

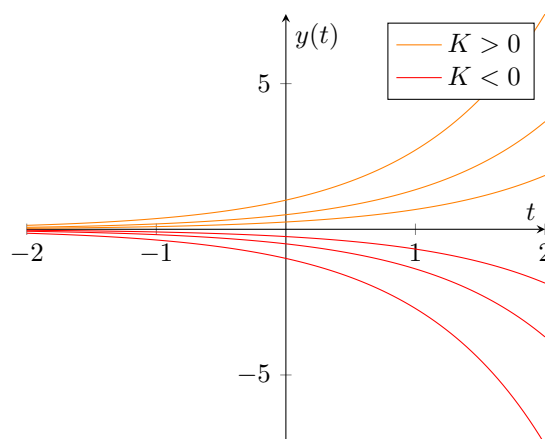


FIGURA 9.1 – Alcune funzioni della famiglia  $y(t) = Ke^{\varepsilon t}$ .

**OSSERVAZIONI.**

- Per determinare un'unica funzione necessitiamo, in accordo con quanto già osservato a pag. 118, di una condizione iniziale che in questo caso rappresenta la



popolazione in un dato momento  $t$ .

- Si può anche ottenere la soluzione osservando che

$$0 = y'(t) - \varepsilon y(t) \iff e^{\varepsilon t} \left( \frac{d}{dt} e^{-\varepsilon t} y(t) \right) = 0 \iff \frac{d}{dt} e^{-\varepsilon t} y(t)$$

e quindi

$$e^{-\varepsilon t} y(t) = K \iff y(t) = K e^{\varepsilon t}$$

- Il **tempo di raddoppio/dimezzamento** è quel tempo  $T$  tale che  $y(t+T) = 2y(t)$ :

$$K e^{\varepsilon(t+T)} = 2 K e^{\varepsilon t}$$

$$e^{\varepsilon t} e^{\varepsilon T} = 2 e^{\varepsilon t}$$

$$e^{\varepsilon T} = 2$$

$$T = \frac{1}{\varepsilon} \log 2$$

Il tempo di raddoppio (o di dimezzamento se  $\varepsilon < 0$ ) è *indipendente dalla condizione iniziale*  $K$ . Si ha che  $T \rightarrow \infty$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ : se il tasso di variazione della popolazione è nullo, il numero di individui non raddoppierà mai.

Un modello più accurato terrebbe conto del fatto che anche  $\varepsilon$  è una funzione del tempo. In questo caso avremmo

$$y'(t) = \varepsilon(t)y(t)$$

e con un ragionamento simile a prima otteniamo

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \varepsilon(t)$$

$$\frac{d}{dt} \log |y(t)| = \varepsilon(t)$$

$$\log |y(t)| = \int_a^t \varepsilon(s) ds + c$$

$$|y(t)| = e^{\int_a^t \varepsilon(s) ds + c}$$

$$y(t) = K e^{\int_a^t \varepsilon(s) ds}.$$

### 9.1.3 Equazioni a variabili separabili

#### DEFINIZIONE 9.1.2. (EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI).

Un'equazione a variabili separabili è un'espressione del tipo:

$$y'(t) = g(t)h(y(t)),$$

o, più brevemente,  $y' = g(t)h(y)$ .

Se  $h(y_0) = 0$  allora  $y(t) = y_0$  costantemente è una soluzione. Supponiamo  $h(y) \neq 0$ . Allora possiamo scrivere

$$\frac{y'}{h(y)} = g(t).$$

Cerchiamo una primitiva  $H(y)$  di  $\frac{1}{h(y)}$  e una  $G$  di  $g$ , ottenute rispettivamente calcolando  $\int \frac{dy}{h(y)}$  e  $\int g(t) dt$ :

$$\frac{d}{dt}H(y) = H'(y)y'(t) = \frac{y'}{h(y)} = g(t) \iff H(y) = G(t) + c.$$

L'ultima espressione definisce implicitamente  $y(t)$ : sapendo che la derivata di  $H(y)$  è

$$H'(y) = \frac{1}{h(y)}$$

con  $h(y) \neq 0$ , possiamo usare il teorema d'inversione locale e ricavare

$$y(t) = H^{-1}(G(t) + c).$$

**ATTENZIONE!** Sebbene sia concettualmente inesatto, nei calcoli pratici è comune scrivere

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = g(t)h(y) \iff \frac{dy}{h(y)} = g(t)dt \implies \int_{y_0}^y \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^t g(s)ds,$$

nascondendo un cambio di variabile. Sarebbe invece corretta lasciare inizialmente la derivata  $y'$  così com'è,

$$y'(t) = g(t)h(y) \implies \int_{t_0}^t \frac{y'}{h(y(s))} ds = \int_{t_0}^t g(s)ds,$$

per fare il cambio di variabile  $z = y(s)$  e ottenere  $dz = y' ds$ :

$$\int_{y_0}^y \frac{dz}{h(z)} = \int_{t_0}^t g(s)ds.$$

È importante tenere a mente questo fatto durante lo studio dell'intervallo massimale di definizione di un'equazione differenziale, che vedremo successivamente: capita spesso di sbagliare perché il cambio di variabile è stato effettuato con leggerezza e ci si è dimenticati, ad esempio, di cambiare anche gli estremi di integrazione.

#### 9.1.4 Esempio: Esplosione in tempo finito

Supponiamo ora di avere un contenitore riempito con del materiale infiammabile che prende fuoco. Indichiamo con:

- $y$  la quantità di materiale infuocato;
- $\theta$  la temperatura.

È ragionevole supporre che le due quantità s'influenzino a vicenda; pertanto poniamo

$$y' = c_y \theta y; \quad \theta = c_\theta y$$

e otteniamo

$$y' = Ky^2.$$

Per facilitare i calcoli, poniamo  $K = 1$  e cerchiamo di ricondurci a un'equazione a variabili separabili:

$$y' = y^2; \quad g(t) = 1; \quad h(y) = y^2.$$

Le primitive  $G(t)$  di  $g$  e  $H(y)$  di  $h$  sono

$$H(y) = -\frac{1}{y}; \quad G(t) = t; \quad H(y(t)) = G(t) + c \implies -\frac{1}{y} = t + K$$

ed esplicitando  $y(t)$  otteniamo

$$y(t) = \frac{1}{K-t}$$

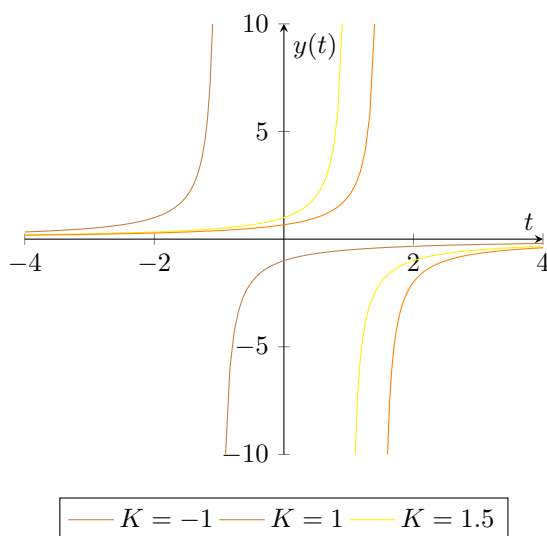


FIGURA 9.2 – Alcune funzioni della famiglia  $y(t) = \frac{1}{K-t}$ .

**OSSERVAZIONE.** Poiché per  $t = K$  la funzione è discontinua, non ha senso considerare la funzione al di là di tale valore sia per motivi di natura fisica - l'esplosione è già avvenuta, consumando tutto il materiale - sia per motivi di natura matematica - una funzione integrale *non* ammette discontinuità.

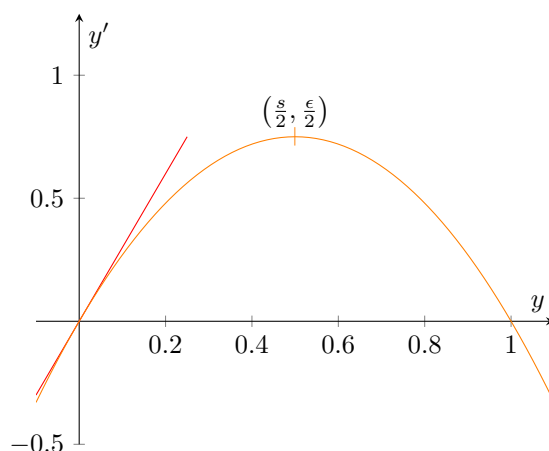
In un modello del genere, uno dei quesiti principali è determinare in quanto tempo avviene l'esplosione in base al materiale infiammabile di partenza. L'intervallo di risoluzione dell'equazione differenziale è dunque una delle incognite da studiare.

### 9.1.5 Esempio: Modello logistico

Torniamo al problema della crescita della popolazione. Il *modello malthusiano* è una buona approssimazione della variazione di una popolazione di pochi individui, ma nella realtà al crescere della popolazione le risorse disponibili diventano sempre di più un problema: introduciamo quindi una variabile sperimentale  $s$  chiamata **saturnazione** che indica il numero massimo di individui raggiungibile prima che la popolazione inizi a decrescere. L'equazione differenziale

$$y' = \varepsilon y \left(1 - \frac{y}{s}\right) = f(y)$$

descrive bene il problema della scarsità di risorse: quando si ha una popolazione di pochi individui  $\left(1 - \frac{y}{s}\right) \approx 1$  la crescita è simile a quella del modello malthusiano; quando invece la popolazione è più numerosa, il fattore  $\left(1 - \frac{y}{s}\right)$  inizia ad essere rilevante fino a diventare negativo per  $y > s$ , dopo il quale la popolazione inizia a diminuire.

FIGURA 9.3 – Andamento di  $y'$ .

Occupiamoci ora di risolvere questa equazione differenziale a variabili separabili, in quanto  $g(t) \equiv 1$ . Le due funzioni costanti  $y \equiv s$  e  $y \equiv 0$  sono soluzioni: intuitivamente, se non ci sono abitanti la popolazione non crescerà mai e se parte da  $s$  abitanti è già in equilibrio. Se  $y \neq 0, s$ , possiamo scrivere

$$\frac{y'}{y(s-y)} = \frac{\varepsilon}{s} \implies h(y) = \frac{1}{y(s-y)}.$$

Calcoliamo dunque una primitiva di  $h(y)$  utilizzando il metodo dei fratti semplici:

$$H(y) = \int \frac{dy}{y(s-y)} = \int \frac{1}{s} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y-s} \right) dy = \frac{1}{s} (\ln |y| - \ln |y-s|) = \frac{1}{s} \ln \left| \frac{y}{y-s} \right|,$$

e quindi

$$\frac{1}{s} \ln \left| \frac{y}{y-s} \right| = \frac{\varepsilon}{s} t + c \implies \frac{y}{y-s} = Ke^{\varepsilon t}.$$

Risolviamo rispetto a  $y$ :

$$1 + \frac{s}{y-s} = Ke^{\varepsilon t} \implies \frac{s}{y-s} = Ke^{\varepsilon t} - 1 \implies y-s = \frac{s}{Ke^{\varepsilon t} - 1} \implies y = s \left( 1 + \frac{1}{Ke^{\varepsilon t} - 1} \right).$$

Come precedentemente detto, il modello logistico prevedeva i seguenti comportamenti per una popolazione  $y \geq 0$  - tenendo conto che il caso  $y < 0$  non è fisicamente possibile:

- Se  $0 < y < s$ , allora la popolazione tende a salire;
- Se  $y > s$ , allora la popolazione tende a scendere per mancanza di risorse.

Osserviamo che al variare di  $k$  si verificano tutti gli scenari possibili:

- Se  $k < 0$ , allora  $y \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow -\infty$  mentre  $y \rightarrow s$  per  $t \rightarrow \infty$ ;
- Se  $k > 0$ , allora abbiamo un asintoto verticale in  $ke^{\varepsilon t} = 1$ , ossia  $t = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{1}{k} \right)$ . Se  $t < \frac{1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{1}{k} \right)$  allora  $y < 0$  e dunque non ha senso studiarlo per motivi fisici, mentre se  $t \rightarrow \infty$  allora nuovamente  $y \rightarrow s$ .

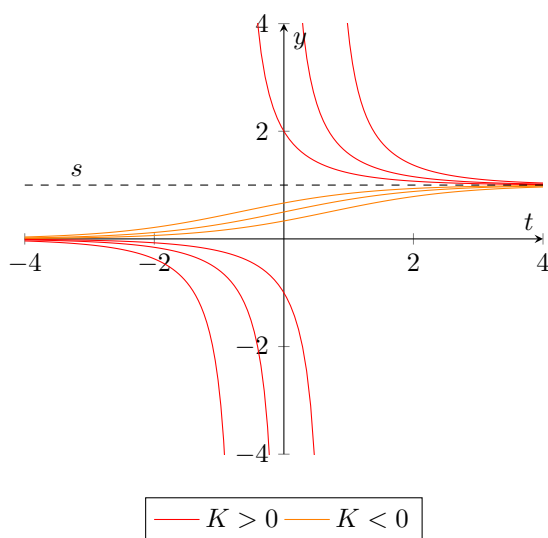


FIGURA 9.4 – Alcune soluzioni del problema.

## 9.2 EQUIVALENZA TRA EQUAZIONI DI ORDINE $n$ E SISTEMI DEL PRIMO ORDINE

Un'equazione in forma normale di ordine  $n$  equivale a un sistema del primo ordine. Supponiamo di avere  $\mathbf{y}^{(n)}(t) = f(t, \mathbf{y}(t), \dots, \mathbf{y}^{(n-1)}(t))$  e poniamo

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}'_1 = \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}'_{n-2} = \mathbf{y}_{n-1} \\ \mathbf{y}'_{n-1} = f(t, \mathbf{y}(t), \dots, \mathbf{y}_{(n-1)}(t)) \end{cases}$$

Se  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^d$  definiamo

$$\mathbb{R}^{nd} \ni \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1}(t) \\ \mathbf{y}'_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

e il sistema diventa

$$\mathbb{R}^{nd} \ni F(t, \mathbf{z}) = \begin{cases} \mathbf{z}_1 = \mathbf{y}'(t) \\ \mathbf{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n \\ \mathbf{z}'(t) = f(t, \mathbf{z}(t), \dots, \mathbf{z}_n(t)). \end{cases}$$

Questo fatto ci permette di focalizzare la nostra attenzione sulla risoluzione di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine visto che *le equazioni differenziali ordinarie di ordine  $n$  possono essere ricondotte a un'equazione differenziale ordinaria vettoriale del primo ordine.*

## 9.2.1 Esempio: secondo principio della dinamica

Se ci poniamo ancora una volta in un sistema inerziale vale il secondo principio della dinamica, che è un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{m}.$$

Applicando quanto visto nella pagina, ci riconduciamo a un'equazione del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \frac{F(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{m} \end{cases} \quad \mathbb{R}^{2d} \ni w(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad \Phi(t, z) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \frac{F(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{m} \end{bmatrix}$$

e otteniamo  $\mathbf{z}'(t) = \Phi(t, \mathbf{z}(t))$

## 9.3 PROBLEMI DI CAUCHY

Abbiamo visto a pag. 118 che se imponiamo  $n$  condizioni a un'equazione differenziale di ordine  $n$  otteniamo un'unica soluzione, quando essa è definita. Inoltre, grazie a quanto osservato a pag. 124 siamo in grado di ricondurre un'EDO di ordine  $n$  a un sistema di EDO del prim'ordine. È pertanto naturale la seguente

**DEFINIZIONE 9.3.1. (PROBLEMA DI CAUCHY).**

Un sistema della forma

$$(PC) \begin{cases} y' = f(t, \mathbf{y}) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$$

si dice **problema ai valori iniziali o di Cauchy**.

**ESEMPIO.** Un tipo particolare di problema di Cauchy molto comune in fisica è il **problema ai limiti**:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{x}(a) = A \\ \mathbf{x}(b) = B \end{cases}$$

Ad esempio, se  $\mathbf{x}$  descrive la posizione di un punto materiale durante l'intervallo di tempo  $[a, b]$ , allora la soluzione del suddetto problema di Cauchy è l'unica descrizione del moto del punto che ha accelerazione descritta dalla funzione  $f$  e che ai tempi  $t = a$  e  $t = b$  si trova rispettivamente in  $A$  e  $B$ .

## 9.4 ESISTENZA E UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

Finora abbiamo proposto esempi di problemi che abbiamo risolto trovando la soluzione di opportune equazioni differenziali in maniera "empirica", senza utilizzare alcun teorema particolare e soprattutto senza avere criteri per stabilire l'effettiva *esistenza di una soluzione*. Introduciamo quindi alcuni concetti che ci porteranno a dimostrare il *teorema di esistenza e unicità locale di soluzioni per il problema di Cauchy*.

**DEFINIZIONE 9.4.I. (LIPSCHITZIANITÀ IN  $y$ , UNIFORMEMENTE RISPETTO A  $t$ ).**

Sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $D$  aperto. Diciamo che  $f$  è **lipschitziana in  $y$  in  $D$  uniformemente rispetto a  $t$**  se esiste  $L \in \mathbb{R}$  tale che:

$$\|f(t, \mathbf{y}_1) - f(t, \mathbf{y}_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall (t, \mathbf{y}_1), (t, \mathbf{y}_2) \in D \quad (9.2)$$

Diciamo che  $f$  è **localmente lipschitziana in  $y$  in  $D$ , uniformemente rispetto a  $t$** , se ogni  $(\tau, \xi) \in D$  ammette un intorno  $U \subset D$  in cui vale (9.2).

**OSSERVAZIONE (LIPSCHITZIANITÀ IN  $y$  UNIF. IN  $t$  NON IMPLICA CONTINUITÀ).**

La *lipschitzianità* implica la continuità, ma se  $f(t, y)$  è *lipschitziana in  $y$  uniformemente rispetto a  $t$* , allora non è detto che sia continua. Per esempio

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, y) &\longmapsto \text{sign}(t) + y \end{aligned}$$

è lipschitziana in  $y$  uniformemente rispetto a  $t$  in quanto

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| = \|\text{sign}(t) + y_2 - \text{sign}(t) - y_1\| = \|y_2 - y_1\|,$$

ma non è continua.

**OSSERVAZIONE.** La lipschitzianità è una proprietà legata alla *limitatezza dei rapporti incrementali*: possiamo infatti manipolare (9.2) e ottenere

$$\frac{\|f(t, \mathbf{y}_1) - f(t, \mathbf{y}_2)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\mathbb{R}^n}} \leq L \quad \forall (t, \mathbf{y}_1), (t, \mathbf{y}_2) \in D.$$

**ESEMPIO.** È facile verificare se l'equazione del modello malthusiano è descritta tramite una funzione lipschitziana

$$f(t, y) = \varepsilon(t)y \implies \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| = \|\varepsilon(t)\| \|y_1 - y_2\|.$$

Se  $|\varepsilon(t)| \leq L \in \mathbb{R}$  allora  $f(t, y)$  è lipschitziana.

**PROPOSIZIONE 9.4.I. (CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA LIPSCHITZIANITÀ).**

Data  $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  aperto, se valgono:

1.  $D = I \times J$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $J \subseteq \mathbb{R}^n$ ;
2.  $J$  è convesso, ossia se  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in J$  allora  $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2] \subset J$ ;
3.  $f \in \mathcal{C}^1(D; \mathbb{R}^n)$ ;
4.  $\|D_y f(t, \mathbf{y})\| \leq L \quad \forall (t, \mathbf{y}) \in I \times J$ ;

allora  $f$  è lipschitziana in  $\mathbf{y}$  in  $D$  uniformemente rispetto a  $t$ . Se  $D$  è un aperto qualunque e  $f \in \mathcal{C}^1(D)$  (non vale 2. e 4.) allora  $f$  è localmente lipschitziana in  $\mathbf{y}$  in  $D$ , uniformemente rispetto a  $t$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Usiamo il teorema 6.4.IO sfruttando la convessità di  $J$ : se consideriamo  $(t, \mathbf{y}_1), (t, \mathbf{y}_2) \in I \times J$ , si ha

$$\|f(t, \mathbf{y}_1) - f(t, \mathbf{y}_2)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \max_{\mathbf{y} \in \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}} \|D_{\mathbf{y}} f(t, \mathbf{y})\| \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|.$$

Per il secondo punto, sia  $(\tau, \xi) \in D$ ; poiché  $\|D_{\mathbf{y}} f\|$  è una funzione continua, esistono  $\delta > 0$  e  $\sigma > 0$  tali che  $\|D_{\mathbf{y}} f\|$  è limitata in  $I = (\tau - \delta, \tau + \delta) \times B_{\sigma}(\xi) = J \subseteq D$ : possiamo quindi applicare il punto A, essendo  $J$  convesso.  $\square$

#### 9.4.1 Teorema di esistenza e unicità locale

##### TEOREMA 9.4.I. (ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE).

Sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}_{\mathbf{y}, t}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  aperto, tale che:

1.  $f$  è continua in  $D$ ;
2.  $f$  è localmente lipschitziana in  $\mathbf{y}$  in  $D$ , uniformemente rispetto a  $t$ .

Allora per ogni  $(\tau, \xi) \in D$  esiste un  $\delta$  tale che, detto  $I_{\delta} = [\tau - \delta, \tau + \delta]$ , esiste  $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , tale che  $(t, \varphi(t)) \in D$  per ogni  $t \in I_{\delta}$ ,  $\varphi \in C^1(I_{\delta}; \mathbb{R}^n)$  e  $\varphi$  è risolve il problema di Cauchy

$$(PC) \begin{cases} \varphi' = f(t, \varphi) \\ \varphi(\tau) = \xi \end{cases} \quad t \in I_{\delta}.$$

Tale soluzione è unica: se  $\psi : I_{\delta} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  è un'altra soluzione di (PC) allora  $\varphi \equiv \psi$  su  $I_{\delta} \cap I_{\delta}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione si divide in 4 passi:

1. **Equazione integrale di Volterra.** Siano  $\delta_0 > 0$  e  $\sigma_0 > 0$  tali che  $I_{\delta_0} \times \overline{B_{\sigma_0}(\xi)} \subseteq D$ . Osserviamo che una funzione  $\varphi \in C^1(I_{\delta_0}; \overline{B_{\sigma_0}(\xi)})$  è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(\tau) = \xi \end{cases} \quad (t, \xi) \in I_{\delta_0} \times \overline{B_{\sigma_0}(\xi)}$$

se e solo se risolve l'equazione integrale di Volterra

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Infatti, se  $\varphi$  è una soluzione del problema di Cauchy, allora  $f(t, \varphi(t))$  è continua perché lo sono  $f$  e  $\varphi$  e integrando trovo che

$$\underbrace{\varphi(t) - \varphi(\tau)}_{=\xi} = \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds \iff \varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Viceversa, se  $\varphi$  risolve l'equazione integrale di Volterra, allora è derivabile in  $I_{\delta_0}$  e  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ . Inoltre, l'equazione di Volterra implica  $\varphi(\tau) = \xi$ .

2. **Costruzione di una contrazione.** Consideriamo l'operatore di funzioni

$$T(\varphi)(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$



Vogliamo dimostrare che, per  $\delta$  e  $\sigma$  abbastanza piccoli,  $T$  è una contrazione in  $\mathcal{C}(I_\delta; \overline{B_\sigma(\xi)})$ . Siano  $\delta_1 \in (0, \delta_0)$  e  $\sigma_1 \in (0, \sigma_0)$  tali che  $I_{\delta_1} \times \overline{B_{\sigma_1}(\xi)} \subseteq D$  e siano  $M, L > 0$  tali che

$$\|f(t, \mathbf{y})\| \leq M \quad \forall (t, \mathbf{y}) \in I_{\delta_1} \times \overline{B_{\sigma_1}(\xi)}; \quad (9.3)$$

$$\|f(t, \mathbf{y}_1) - f(t, \mathbf{y}_2)\| \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \quad \forall (t, \mathbf{y}_1), (t, \mathbf{y}_2) \in I_{\delta_1} \times \overline{B_{\sigma_1}(\xi)}. \quad (9.4)$$

La (9.3) è possibile in quanto  $f$  è continua, dunque è limitata in un intorno di  $(\tau, \xi)$ , mentre la (9.4) vale poiché la funzione è localmente lipschitziana in  $\mathbf{y}$  in  $D$  uniformemente rispetto a  $t$  per ipotesi. Scegliamo ora  $\delta < \min(\delta_1, \frac{\sigma_1}{M}, \frac{1}{L})$  e  $\sigma = \sigma_1$ . Se  $\varphi \in \mathcal{C}^0(I_\delta; \overline{B_\sigma(\xi)})$ , allora

$$\|T(\varphi)(t) - \xi\| = \left\| \int_\tau^t f(s, \varphi(s)) ds \right\| \leq \left| \int_\tau^t \|f(s, \varphi(s))\| ds \right|;$$

la norma fuori dall'integrale garantisce che il risultato sia sempre un numero positivo anche se dovesse essere  $t < \tau$ . Per la proprietà (9.3), allora

$$\left| \int_\tau^t \|f(s, \varphi(s))\| ds \right| \leq M|t - \tau| \leq M\delta < \sigma,$$

ossia  $\max_{t \in I_\delta} \|T(\varphi)(t) - \xi\| < \sigma$ , cioè per ogni  $t \in I_\delta$ ,  $T(\varphi)(t) \in B_\sigma(\xi)$ . Dunque l'applicazione  $T$  manda  $\mathcal{C}(I_\delta; \overline{B_\sigma(\xi)})$  in sé. Mostriamo ora che  $T$  è una contrazione. Siano  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}(I_\delta; \overline{B_\sigma(\xi)})$ . Allora

$$\begin{aligned} \|T(\varphi_1)(t) - T(\varphi_2)(t)\| &= \left\| \int_\tau^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] ds \right\| \\ &\leq \left| \int_\tau^t \| [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] \| ds \right| \end{aligned} \quad (9.5)$$

e per la proprietà (9.4) si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_\tau^t \| [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] \| ds \right| &\leq L \left| \int_\tau^t \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \right| \\ &\leq L|t - \tau| \max_{s \in I_\delta} \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| \\ &\leq L\delta \max_{s \in I_\delta} \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Per come abbiamo scelto  $\delta$ , possiamo assumere  $L\delta < 1$ .

3. **Applicazione del teorema delle contrazioni.** Consideriamo  $X = \mathcal{C}(I_\delta, \mathbb{R}^n)$  con la norma Lagrangiana del max. Sappiamo che  $(X, d)$  è uno spazio metrico completo. Osserviamo che

$$\mathcal{C}(I_\delta, \overline{B_\sigma(\xi)}) = \{\varphi \in X : d(\varphi, \xi) \leq \sigma\} = X_\sigma$$

è un sottoinsieme chiuso di  $X$ ;  $(X_\sigma, d)$  è uno spazio metrico completo a sua volta. Esiste un unico punto fisso di  $T$  che è l'unica soluzione dell'equazione di Volterra (e quindi del problema di Cauchy) in  $\mathcal{C}(I_\delta, \overline{B_\sigma(\xi)})$ . Abbiamo osservato precedentemente che l'immagine di  $T$  è contenuta in  $B_\sigma(\xi)$ , quindi anche il suo punto fisso cadrà nell'interno.

4. **Unicità della soluzione.** Siano  $\varphi, \psi$  due soluzioni del problema di Cauchy, definite in un intervallo  $I$ . Consideriamo l'insieme:

$$J = \{t \in I : \varphi(t) = \psi(t)\}$$

Allora sappiamo che:

- $J$  è non vuoto. Infatti  $\varphi(\tau) = \psi(\tau) = \xi$ .
- $J$  è aperto. Per vedere ciò mostriamo che è intorno di ogni suo punto. Sia  $t_0 \in J$ , ovvero un valore tale che  $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = \xi_0$ . Per continuità, abbiamo un intervallo comune  $I_{\delta}, \bar{\delta} \neq 0$  in cui

$$\max_{t \in I_{\delta}} \|\varphi(t) - \xi\| \leq \sigma \quad \text{e} \quad \max_{t \in I_{\delta}} \|\psi(t) - \xi\| \leq \sigma.$$

Prendendo il minimo tra  $\delta$  e  $\bar{\delta}$  abbiamo un intorno di  $t_0$  in cui le soluzioni sono uguali grazie all'unicità del punto fisso, ovvero un intorno interamente contenuto in  $J$ . Dunque  $J$  è aperto.

- $J$  è chiuso. Dato che  $\varphi$  e  $\psi$  sono continue, allora lo è anche  $\varphi - \psi$ . Dato che  $J = (\varphi - \psi)^{-1}(\{0\})$ , allora è controimmagine di un chiuso, dunque chiuso.

Dunque  $J$  è aperto, chiuso e non vuoto; per connessione di  $I$  deve essere  $J = I$ , cioè  $\varphi \equiv \psi$  su tutto  $I$ . □

**OSSERVAZIONE.** Il teorema di esistenza e unicità è esistenziale ma non costruttivo. Tuttavia, l'unicità della soluzione rende esaustivi tutti i possibili metodi per trovare le soluzioni. Per esempio, se con il metodo di separazione delle variabili troviamo una soluzione ad un problema di Cauchy, allora sappiamo per certo che non ce ne possono essere altre.

#### 9.4.2 Metodo di risoluzione iterativo

Come osservato necessitiamo di metodi per determinare o quantomeno approssimare la soluzione di un problema di Cauchy. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}) \\ \varphi(\tau) = \xi \end{cases}$$

il teorema delle contrazioni fornisce un metodo iterativo per approssimarne la soluzione:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0(t) &= \xi \\ \mathbf{y}_1(t) &= \xi + \int_{\tau}^t f(s, \xi) ds = T(\mathbf{y}_0)(t) \\ \mathbf{y}_2(t) &= \xi + \int_{\tau}^t f(s, \mathbf{y}_1(s)) ds = T(\mathbf{y}_1)(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_{n+1}(t) &= \xi + \int_{\tau}^t f(s, \mathbf{y}_n(s)) ds = T(\mathbf{y}_n) \end{aligned}$$

**ESEMPIO.** Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \varepsilon y \\ y(0) = \xi \end{cases} \quad \varepsilon, \xi \in \mathbb{R}.$$

Applichiamo il metodo iterativo:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \xi \\ y_1(t) &= \xi + \int_0^t f(s, y_0(s)) ds = \xi + \int_0^t \varepsilon \xi ds = \xi + \varepsilon \xi t = \xi(1 + \varepsilon t) \\ y_2(t) &= \xi + \int_0^t \varepsilon \xi(1 + \varepsilon t) ds = \xi + \varepsilon \xi t + \varepsilon^2 \xi \frac{t^2}{2} = \xi \left( 1 + \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Per induzione, si mostra che se

$$y_n(t) = \xi \left( 1 + \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} + \dots + \frac{\varepsilon^n t^n}{(n)!} \right),$$

allora:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= \xi + \int_0^t \varepsilon y_n(s) ds \\ &= \xi \left( 1 + \int_0^t (\varepsilon + \varepsilon^2 s + \frac{\varepsilon^3 s^2}{2} + \dots + \frac{\varepsilon^{n+1} s^n}{n!}) ds \right) \\ &= \xi \left( 1 + \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} + \dots + \frac{\varepsilon^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!} \right); \end{aligned}$$

Notiamo che  $y_n$  è il polinomio di Taylor di grado  $n$  centrato nel punto  $t_0 = 0$  della funzione  $y = \xi e^{\varepsilon t}$ ; se facciamo tendere  $n \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$y_n(t) = \xi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\varepsilon t)^n}{n!} = \xi e^{\varepsilon t}.$$

Il resto secondo Lagrange del polinomio di Taylor ci fornisce anche un'utile stima dell'errore della ridotta  $n$ -esima della serie di Taylor:

$$e^{\varepsilon t} - y_n(t) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!} e^{ct} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad c \in (0, t).$$

**ESEMPIO.** Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(0) = \xi \end{cases} \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \mathbf{y}, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

In maniera del tutto analoga al caso precedente si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_n(t) = \xi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \xi e^{At} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

La serie converge sempre poiché lo spazio degli operatori dotato della norma operatoriale è completo e poiché la convergenza della norma della serie implica la convergenza puntuale, come visto nel teorema 6.4.8. Vale anche la seguente stima:

$$e^{At} - \mathbf{y}_n(t) = \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!} e^{ct} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad c \in \mathbb{R}^n$$

**ESEMPIO (OSCILLATORE ARMONICO).** Sia dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie che descrive il moto di un oscillatore armonico:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \dot{x}(0) = \eta \\ x(0) = \xi \end{cases} \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Poniamo  $\dot{x} = y$  e otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \\ y(0) = \eta \\ x(0) = \xi \end{cases} \quad f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(y) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

Applichiamo il metodo iterativo:

$$\begin{aligned} x_0 &= \xi; \\ y_0 &= \eta; \\ x_1(t) &= \xi + \int_0^t f_1(y_0) ds = \xi + \int_0^t \eta ds = \xi + \eta t; \\ y_1(t) &= \eta + \int_0^t f_2(x_0) ds = \eta + \int_0^t -\omega^2 \xi ds = \eta - \omega^2 \xi t; \\ x_2(t) &= \xi + \eta t - \frac{(\omega t)^2 \xi}{2}; \\ y_2(t) &= \eta - \omega^2 \xi t - \frac{(\omega t)^2 \eta}{2}; \\ x_3(t) &= \xi \left( 1 - \frac{(\omega t)^2}{2} \right) + \frac{\eta}{\omega} \left( \omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} \right); \\ y_3(t) &= \eta \left( 1 - \frac{(\omega t)^2}{2} \right) - \xi \omega \left( \omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} \right). \end{aligned}$$

Osserviamo, tramite le manipolazioni algebriche proposte, che il termine  $n$ -esimo è una combinazione lineare dei polinomi di Taylor di ordine  $n$  di  $\cos \omega t$  e  $\sin \omega t$ , quindi per  $n \rightarrow +\infty$  si ha

$$\begin{aligned} x_n(t) &\rightarrow \xi \cos \omega t + \frac{\eta}{\omega} \sin \omega t = x(t); \\ y_n(t) &\rightarrow \eta \cos \omega t - \omega \xi \sin \omega t = y(t). \end{aligned}$$

In effetti vale  $\dot{x}(t) = y(t)$ ,  $\dot{y}(t) = -\omega^2 x(t)$ .

### 9.4.3 Pennello di Peano

Vediamo ora come venendo meno l'ipotesi di lipschitzianità locale si possa perdere l'unicità della soluzione. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

L'ipotesi di lipschitzianità locale non è verificata in un intorno di 0: sia infatti  $y_1 = 0$  e  $y_2 = y$  e consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{|f(y_1) - f(y_2)|}{|y_1 - y_2|} = \left| \frac{y^{\frac{2}{3}}}{y} \right| = \frac{1}{|y|^{\frac{1}{3}}} \rightarrow \infty, \quad \text{se } y \rightarrow 0.$$

Risolviamo ora l'equazione differenziale, che è a variabili separabili:

$$\int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = \int dt \implies 3y^{\frac{1}{3}} = t + c \implies y = \frac{1}{27}(t + c)^3.$$

Dato che  $y(0) = 0$ , allora  $c = 0$  e dunque  $y = \frac{1}{27}t^3$  è una soluzione dell'equazione differenziale. Ma anche la funzione  $y(t) = 0$  è una soluzione. Inoltre, combinando queste due funzioni, possiamo ottenere infinite soluzioni.

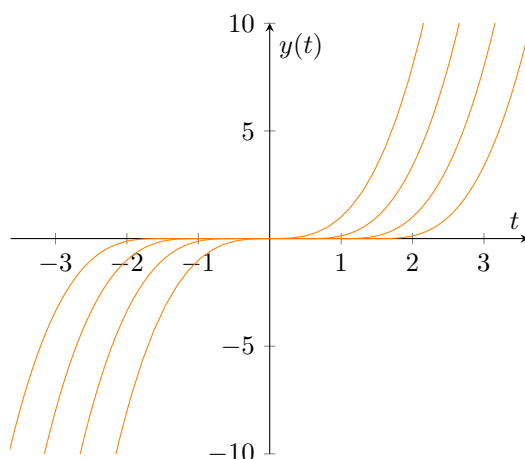


FIGURA 9.5 – Il “pennello” di Peano.

Anche se l'unicità può diventare problematica, possiamo comunque dire qualcosa sulla esistenza. Infatti, vale il

**TEOREMA 9.4.2. (DI PEANO).**

Sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  continua,  $D$  aperto e  $(\tau, \xi) \in D$ . Allora esiste  $\delta > 0$  tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \varphi' = f(t, y) \\ \varphi(\tau) = \xi \end{cases} \quad t \in I_\delta$$

ammette **almeno** una soluzione. □

La dimostrazione verrà fornita nel corso di ISTITUZIONI DI ANALISI.

9.4.4 *Regolarità della soluzione*

**TEOREMA 9.4.3. (REGOLARITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY).**

Sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1(D)$ ,  $D$  aperto, e sia  $(\tau, \xi) \in D$ . Allora esiste un  $\delta > 0$  tale

che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \varphi' = f(t, y) \\ \varphi(\tau) = \xi \end{cases}$$

è una funzione  $\varphi(t)$  di classe  $\mathcal{C}^2(I_\delta)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Prima di tutto, ricordiamo che se  $f \in \mathcal{C}^1(D)$  allora è anche localmente lipschitziana, dunque vale il teorema di esistenza e unicità di una soluzione. Dato che  $y' = f(t, y(t))$ , per il teorema della differenziabilità delle funzioni composte si ha

$$\frac{d}{dt} [f(t, y(t))] = \underbrace{\frac{d}{dt} f(t, y(t))}_{\in \mathcal{C}^0} + \underbrace{D_y f(t, y(t))}_{\in \mathcal{C}^0} \underbrace{y'(t)}_{\in \mathcal{C}^0}.$$

Essendo  $y' \in \mathcal{C}^1(I)$ , allora  $\varphi \in \mathcal{C}^2(I)$ . □

**ESEMPIO.** Coerentemente con il precedente teorema, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette per soluzione la funzione  $y = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} \notin \mathcal{C}^2$ , essendo  $y^{\frac{1}{3}} \notin \mathcal{C}^1$ .

**TEOREMA 9.4.4.**

Data  $f$  funzione di un problema di Cauchy e  $\varphi$  soluzione, si ha

$$f \in \mathcal{C}^k(D) \implies \varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(I_\delta).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per induzione su  $k$ :

- $k = 1$ . Già visto come teorema 9.4.3;
- $k \implies k + 1$ . Sia  $f \in \mathcal{C}^k(D) \subseteq \mathcal{C}^{k-1}(D)$ . Per ipotesi induttiva  $\varphi \in \mathcal{C}^k(I_\delta)$ . Allora:

$$\begin{aligned} \varphi' : I_\delta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t, \varphi(t)) \in \mathcal{C}^k(D) \end{aligned} \tag{9.7}$$

e  $\varphi' \in \mathcal{C}^k(I_\delta)$ , ossia  $\varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(I_\delta)$ . □

**OSSERVAZIONE.** Siano  $A, B$  aperti e  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, g : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ . Si ha che se  $f, g \in \mathcal{C}^k$ , allora la composizione  $f \circ g \in \mathcal{C}^k$ . Si dimostra per induzione esprimendo le derivate parziali con le matrici Jacobiane.

### 9.4.5 Prolungabilità della soluzione

Supponiamo di avere un problema di Cauchy che verifichi le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale, per cui esiste ed è unica la soluzione  $\varphi : I_\delta \longrightarrow \mathbb{R}^n$  in  $I_\delta$ . Cerchiamo di estendere il dominio di definizione di  $\varphi$ . Sappiamo già che non sarà sempre possibile estendere il dominio di definizione di  $\varphi$  a tutto  $\mathbb{R}$ : nel caso dell'esplosione in tempo finito tutte le soluzioni sono definite su aperti  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Per poter studiare tutti i possibili casi introduciamo la seguente

**DEFINIZIONE 9.4.2. (INTERVALLO MASSIMALE D'ESISTENZA).**

Definiamo **intervallo massimale d'esistenza della soluzione**  $\varphi$  il più grande intervallo limitato o illimitato su cui è definita una soluzione di un problema di Cauchy:

$$I = (T_{min}, T_{max}) \subseteq \mathbb{R}$$

**PROPOSIZIONE 9.4.2. (CARATTERIZZAZIONE DELL'INTERVALLO MASSIMALE).**

Nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sia

$$\mathcal{S} = \{(\varphi, I_\varphi) \in \mathbb{R}^{n+1} : I_\varphi = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \varphi : I_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ è una soluzione di PC su } I_\varphi\}.$$

Allora

$$I = (T_{min}, T_{max}) = \bigcup_{(\varphi, I_\varphi) \in \mathcal{S}} I_\varphi$$

con  $I$  intervallo aperto e connesso.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $t \in I$  e sia  $(\varphi, I_\varphi) \in \mathcal{S}$  tale che  $t \in I_\varphi$ . Definiamo  $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\psi(t) = \varphi(t)$ ; è ben definita poiché:

- se  $t \in I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$  allora  $\varphi_1|_{I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}} \equiv \varphi_2|_{I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}}$ ;
- $\varphi$  risolve l'equazione in un intorno di  $t$  e quindi anche  $\psi$ .

Si ha che  $I$  è unione di intervalli aperti; la connessione è garantita dal fatto che una funzione che risolve il problema di Cauchy risolve anche l'equazione integrale di Volterra, il cui dominio è sempre un intervallo.  $\square$

**PROPOSIZIONE 9.4.3. (ESPLOSIONE A TEMPO FINITO).**

Supponiamo che  $T_{max} < +\infty$ . Allora

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|\psi(t)\| = +\infty.$$

**INTUITIVAMENTE...** Trovata una soluzione  $\varphi$  in  $I_\varphi$ , che è un intervallo chiuso, possiamo applicare nuovamente il teorema di esistenza e unicità locale agli estremi dell'intervallo e ottenere due nuove soluzioni  $\varphi_1, \varphi_2$  negli intervalli  $I_{\varphi_1}, I_{\varphi_2}$  da cui possiamo estrarre un intervallo chiuso e iterare il processo. Quand'è che non riusciamo a coprire tutto  $\mathbb{R}$ ? Quando l'ampiezza  $\delta_i$  degli intervalli tende a 0 e  $\sum_i \delta_i$  converge.

Utilizzeremo il seguente:<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Dopo la fine del corso ci siamo accorti che la dimostrazione vista in classe non era del tutto corretta; proponiamo in sua sede una versione realizzata da Matteo Bisi, studente della coorte 2021-2022.

**LEMMA 9.5.1. (DI BISI).**

Sia  $f(\mathbf{y}, t)$  una funzione che soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale e sia  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ . Allora esistono  $\delta, \sigma > 0$  tali che per ogni  $(\tau, \xi) \in \overline{I_{\delta/3}} \times \overline{B_{\sigma/3}}$  esiste una soluzione locale  $\varphi_{LOC}$  che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(\tau) = \xi \end{cases}$$

e  $\varphi_{LOC}$  è definita in  $[\tau - \frac{\delta}{2}, \tau + \frac{\delta}{2}]$ . □

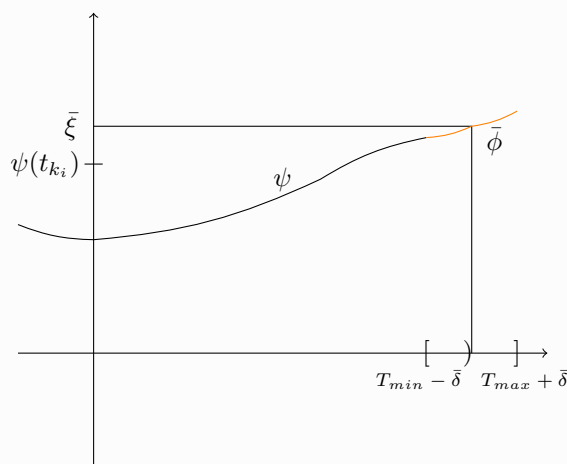
Scegliendo opportuni  $\delta$  e  $\sigma$  la dimostrazione del lemma è la stessa di quella del teorema di esistenza e unicità locale.

**DIMOSTRAZIONE (DELLA PROPOSIZIONE 9.4.3).**

Supponiamo che<sup>a</sup>  $\{t_k\}_k \nearrow T_{max} < +\infty$  e, per assurdo, che  $\psi(t_k) := \xi_k$  sia una successione limitata in  $\mathbb{R}^n$ :  $\|\xi_k\| \leq M$  per ogni  $k$ . Allora esiste una sottosuccessione  $\{t_{k_i}\}_{k_i}$  convergente di  $\{t_k\}$ :

$$\lim_{k_i \rightarrow +\infty} \psi(t_{k_i}) = \xi.$$

Possiamo quindi scegliere un punto  $(t_k, \xi_k)$  in un intorno  $\overline{I_{\delta/3}} \times \overline{B_{\sigma/3}}$  di  $(T_{max}, \xi)$  e applicare il lemma, ottenendo così una soluzione  $\bar{\varphi}$  il cui dominio di definizione  $I_{\bar{\varphi}}$  ammetterà sicuramente infiniti  $t > T_{max}$  essendo la soluzione definita a partire da  $t_k$ ,  $\|t_k - T_{max}\| < \delta/3$  e  $I_{\bar{\varphi}} = [t_k - \frac{\delta}{2}, t_k + \frac{\delta}{2}]$ .



<sup>a</sup>Il simbolo  $\nearrow$  significa che la successione converge da valori inferiori. □

**ESEMPIO (EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI).**

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = g(t)h(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^t g(s)ds.$$



Studiamo l'intervallo massimale d'esistenza. Dobbiamo avere

$$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^{T_{max}} g(s) ds.$$

Se  $g(t) = 1$  si hanno due casi:

1.  $h(y) = y^a$  con  $a \leq 1$ :

$$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{y^a} = +\infty \implies T_{max} = +\infty;$$

2.  $h(y) = y^a$  con  $a > 1$ :

$$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{y^a} < +\infty \implies T_{max} < +\infty.$$

**TEOREMA 9.5.1. (ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE).**

Sia  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , che quindi è localmente lipschitziana e pertanto vale il teorema d'esistenza locale. Supponiamo che esistano  $k_1, k_2 \geq 0$  tali che

$$\|f(t, \mathbf{y})\| \leq k_1 + k_2 \|\mathbf{y}\| \quad \forall (t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Allora, per ogni dato iniziale  $(\tau, \xi)$  esiste ed è unica la soluzione  $\varphi$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(\tau) = \xi \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

## 9.6 EQUAZIONI E SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

In questa sezione ci concentriamo su *sistemi di equazioni lineari*, che verranno approfonditi nei corsi di MODELLI DIFFERENZIALI e MECCANICA RAZIONALE. Possiamo riscrivere il sistema

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(t)y_1 + \dots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}(t)y_1 + \dots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \end{cases}$$

in forma matriciale:

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad A \in C^0(\mathbb{R}^{n,n}), \mathbf{b} \in C^0(\mathbb{R}^n), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

- Se  $b = 0$  il sistema si dice **omogeneo**.
- Se  $b \neq 0$ ,  $b$  si dice **termine forzante**

### 9.6.1 Principio di sovrapposizione

**PROPOSIZIONE 9.6.1. (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE).**

Se  $\varphi_1, \varphi_2$  risolvono rispettivamente

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}_i(t) \quad \text{per } i = 1, 2$$

allora  $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$  risolve

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \lambda_1 \mathbf{b}_1(t) + \lambda_2 \mathbf{b}_2(t).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Si può vedere facilmente considerando le soluzioni  $\varphi_i$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(\tau) = \mathbf{e}_i. \end{cases}$$

dove gli  $\mathbf{e}_i$  sono elementi di una base di  $\mathbb{R}^n$ . □

**OSSERVAZIONE.** Se  $f(t, \mathbf{y}) = A\mathbf{y}$  allora:

1.  $f$  è continua.
2.  $f$  è localmente lipschitziana in  $\mathbf{y}$ , uniformemente in  $t$ . Infatti, poiché

$$f(t, \mathbf{y}_1) - f(t, \mathbf{y}_2) = A(t)\mathbf{y}_1 - A(t)\mathbf{y}_2$$

allora

$$\|f(t, \mathbf{y}_1) - f(t, \mathbf{y}_2)\| = \|A(t)\mathbf{y}_1 - A(t)\mathbf{y}_2\| \leq \|A(t)\| \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$$

con  $L := \sup_{t \in I} \|A(t)\| < +\infty$ , per ogni intervallo  $I$ .

3. Per il punto precedente  $f(t, \mathbf{y})$  soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza locale.
4. Se  $A(t) = A$ , ossia  $A$  è costante, si ha:

$$\|f(t, \mathbf{y})\| \leq \|A\| \|\mathbf{y}\| \leq L \|\mathbf{y}\|,$$

pertanto ponendo  $k_1 = 0, k_2 = L$  con  $L$  norma operatoriale di  $A$  si può applicare il teorema d'esistenza globale.

### 9.6.2 Integrale generale

A questo punto è lecito domandarsi come siano effettivamente fatte le soluzioni di un'equazione vettoriale del tipo

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, A(t) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^{n,n}) \quad \mathbf{b}(t) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n) \quad (9.8)$$

con  $I$  dominio di definizione dell'equazione.

**DEFINIZIONE 9.6.1. (INTEGRALE GENERALE).**

L'integrale generale è l'insieme di tutte le soluzioni di (9.8):

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) : \varphi \text{ è soluzione di (9.8)}\}.$$

**OSSERVAZIONE.** Per il teorema d'esistenza e unicità globale, se  $\varphi$  è una soluzione di (9.8) con  $\mathbf{b}(t) = 0$  costantemente allora o  $\varphi(t) = 0$  per ogni  $t \in I$  oppure  $\varphi(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ .

**PROPOSIZIONE 9.6.2. (CARATTERIZZAZIONE DELL'INTEGRALE GENERALE).**

L'insieme delle soluzioni di (9.8) è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  se  $\mathbf{b}(t) = 0$  costantemente, altrimenti è uno spazio affine di dimensione  $n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per il principio di sovrapposizione  $\mathcal{S}$  è uno spazio vettoriale se  $\mathbf{b}(t) = 0$  o affine se  $\mathbf{b}(t) \neq 0$ . In virtù di ciò, l'insieme delle soluzioni di un'equazione vettoriale qualsiasi è uguale all'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata sommato ad una soluzione particolare:

$$\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_0 + \varphi_b.$$

Di conseguenza, la dimensione di  $\mathcal{S}_b$  è la stessa di  $\mathcal{S}_0$ , pertanto ci rimane da mostrare che  $\dim \mathcal{S}_0 = n$ :

- $\dim \mathcal{S}_0 \geq n$ . Consideriamo le soluzioni  $\varphi_i$  del seguente problema di Cauchy,

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(\tau) = \mathbf{e}_i \end{cases},$$

dove gli  $\mathbf{e}_i$  sono elementi di una base di  $\mathbb{R}^n$  al variare di  $i = 1, \dots, n$ , e osserviamo che le  $\varphi_i$  sono linearmente indipendenti tra loro perché la  $n$ -upla di vettori  $(\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_n(\tau))$  è linearmente indipendente per il *teorema d'esistenza e unicità*.

- $\dim \mathcal{S}_0 \leq n$ . Consideriamo  $n + 1$  soluzioni del problema di Cauchy e valutiamole in  $\tau$ : esistono allora  $\xi_1, \dots, \xi_{n+1} \in \mathbb{R}$  tali che

$$\xi_1 \varphi_1(\tau) + \dots + \xi_{n+1} \varphi_{n+1}(\tau) = 0.$$

Definiamo  $\psi(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \varphi_i(t)$ : sappiamo che  $\psi(\tau) = 0$ , ma si deve avere  $\psi(t) = 0$  per ogni  $t \in I$  per l'osservazione di pag. (9.6.2).  $\square$

Riprendiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(\tau) = \mathbf{e}_i \end{cases}$$

considerato durante la dimostrazione precedente, ma questa volta scegliamo come  $\mathbf{e}_i$  gli elementi della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Come abbiamo visto, i vettori  $\varphi_i(t)$  sono linearmente indipendenti per ogni  $t$  e i vettori  $\varphi_i(\tau)$  sono uguali ad  $\mathbf{e}_i$  a meno di riordinamento.

**DEFINIZIONE 9.6.2. (SOLUZIONE FONDAMENTALE).**

Definiamo **soluzione fondamentale** o **matrice di monodromia** la matrice

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \Phi(\tau) = I_n,$$

dove  $\varphi_i$  sono soluzioni linearmente indipendenti. L'insieme  $\{\varphi_i\}_i$  si dice **insieme fondamentale**. Se non esiste  $\tau$  tale che  $\Phi(\tau) = I_n$  allora  $\Phi(t)$  è detta **matrice wronskiana**.

**OSSERVAZIONE.** La matrice di monodromia gode delle seguenti proprietà:

- $\det \Phi(t) \neq 0 \forall t$ . Tale determinante viene anche detto **wronksiano**.

■  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ . Infatti

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'_{11}(t) & \dots & \varphi'_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{n1}(t) & \dots & \varphi'_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

e  $\varphi'_i = A(t)\varphi_i$ , poiché altrimenti non risolverebbe il problema di Cauchy.

**TEOREMA 9.6.I. (SOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI).**

Sia  $A(t) \in C^0(I, \mathbb{R}^{n,n})$  e  $\Phi$  soluzione fondamentale dell'equazione omogenea associata al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(\tau) = \xi \end{cases} \quad \text{dove } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Se  $\mathbf{b}(t) = 0$  per ogni  $t$ , una soluzione del problema di Cauchy è

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\xi$$

Se invece  $\mathbf{b}(t) \neq 0$  per qualche  $t$ , una soluzione dell'equazione non omogenea è

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\xi + \Phi(t) \int_{\tau}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds. \quad (9.9)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo il caso non omogeneo, essendo il caso omogeneo una semplice conseguenza. Per prima cosa osserviamo che se  $t = \tau$  si ha

$$\mathbf{y}(\tau) = \underbrace{\Phi(\tau)}_{\mathcal{I}_n} \xi + \underbrace{\Phi(\tau) \int_{\tau}^{\tau} \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds}_0$$

ovvero  $\mathbf{y}(\tau) = \xi$ . Verifichiamo che  $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$  derivando (9.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \Phi'(t)\xi + \Phi'(t) \int_{\tau}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t) \\ &= A(t)\Phi(t)\xi + A(t)\Phi(t) \int_{\tau}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds + \mathbf{b}(t) \\ &= A(t) \left[ \underbrace{\Phi(t)\xi + \Phi(t) \int_{\tau}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds}_{\mathbf{y}(t)} \right] + \mathbf{b}(t). \end{aligned} \quad \square$$

**OSSERVAZIONE.** Se  $A(t) = A$  si ha  $\Phi(t) = e^{tA}$ , coerentemente con quanto osservato nel secondo esempio di pag. 130.

## 9.7 † TEOREMA DELL'ASINTOTO

Riportiamo l'utilissimo

**TEOREMA 9.7.1. (TEOREMA DELL'ASINTOTO).**

Sia  $a \in \mathbb{R}$ , sia  $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile e tale che esista finito il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Se esiste finito o infinito il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

allora deve essere nullo.

**DIMOSTRAZIONE.** Utilizzando il teorema del valor medio o di Lagrange, consideriamo

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f'(\xi_x) \implies f(x+1) - f(x) = f'(\xi_x) \quad \xi_x \in (x, x+1).$$

Se  $x \rightarrow +\infty$  allora anche  $\xi_x \rightarrow +\infty$  per il teorema del confronto. Pertanto abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = l - l = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi_x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x). \quad \square$$

## 9.8 † EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI DEL PRIMO ORDINE

## 9.8.1 Equazioni differenziali ordinarie lineari omogenee

**ESERCIZIO.** Studiare l'equazione

$$y' = a(t)y. \quad (9.10)$$

**OSSERVAZIONE.** L'equazione del modello malthusiano è di questo tipo, con  $a(t) = \varepsilon(t)$

**SOLUZIONE.** Proponiamo una risoluzione con il metodo della separazione delle variabili separabili. Per prima cosa supponiamo  $h(y) \neq 0$ , altrimenti la  $y \equiv 0$  costantemente è l'unica soluzione. Abbiamo quindi

$$\int \frac{y'}{y} dt = \int a(t) dt \implies \int \frac{1}{y} dy = A(t) + c \implies \log |y| = A(t) + c$$

con  $A(t)$  una primitiva di  $a(t)$  e  $c$  costante di segno variabile. Otteniamo che una soluzione di (9.10) è

$$y = ke^{At} \quad \forall k \in \mathbb{R}. \quad (9.11)$$

con  $k = e^c$ .

## 9.8.2 Equazioni differenziali ordinarie lineari non omogenee

Forti del precedente risultato possiamo svolgere il seguente:

**ESERCIZIO.** Risolvere la generica equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine:

$$y' = a(t)y + b(t) \quad f(t, y) = a(t)y + b(t) \in C^0(I \times \mathbb{R}). \quad (9.12)$$

**SOLUZIONE.** Osserviamo che  $f$  è lipschitziana in  $y$  uniformemente in  $t$  su  $I \times \mathbb{R}$ , quindi il teorema d'esistenza e unicità globale garantisce l'esistenza di un'unica soluzione. Per risolvere facilmente quest'equazione moltiplichiamo entrambi i membri per una funzione  $\mu(t)$ , cercando di ricostruire la formula della derivata del prodotto:

$$\underbrace{\mu(t)y' - \mu(t)a(t)y}_{(\mu(t)y)'} = b(t)\mu(t). \quad (9.13)$$

Imponendo l'uguaglianza otteniamo:

$$\mu'(t)y + \cancel{\mu(t)y'} = \cancel{\mu(t)y'} - \mu(t)a(t)y \implies \mu'(t) = -\mu(t)a(t);$$

Quest'ultima equazione si risolve con la formula (9.11):

$$\mu(t) = Ke^{A(t)}.$$

Scegliamo com'è lecito  $K = 1$  per facilitare i calcoli e sostituiamo in (9.13):

$$\begin{aligned} e^{-A(t)}(y' - yA(t)) &= e^{-A(t)}b(t) \\ (e^{-A(t)}y)' &= e^{-A(t)}b(t) \\ e^{-A(t)}y &= \int e^{-A(t)}b(t) dt + c. \end{aligned}$$

Una soluzione di (9.12) è quindi

$$y = e^{+A(t)} \left[ c + \int e^{-A(t)}b(t) dt \right].$$

**ESERCIZIO.** Sia data l'equazione differenziale omogenea

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (9.14)$$

Determinare l'insieme delle soluzioni.

**SOLUZIONE.** Dalla teoria ci aspettiamo che l'insieme delle soluzioni sia uno spazio vettoriale di dimensione 2: dobbiamo quindi cercare due generatori  $G_1$  e  $G_2$ , e tutte le soluzioni saranno del tipo  $k_1G_1 + k_2G_2$ , con  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ . Osserviamo che se poniamo  $y = e^{\lambda t}$  e deriviamo otteniamo  $\lambda e^{\lambda t}$ ,  $\lambda^2 e^{\lambda t}$  e l'equazione diviene:

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0 \iff e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \iff a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

L'insieme delle soluzioni di (9.14) è dato da

$\Delta$	radici di $p(\lambda)$	insieme delle soluzioni
$\Delta > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L} \{ e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \}$
$\Delta = 0$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L} \{ x e^{\lambda x}, e^{\lambda x} \}$
$\Delta < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$	$\mathcal{L} \{ e^{\alpha x}(\cos \beta x), e^{\alpha x}(\sin \beta x) \}$

**OSSERVAZIONE (SPIEGAZIONE CASO  $\Delta < 0$ ).**

Se riscriviamo le due soluzioni come  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e considerando la prima si ottiene

$$e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

e poiché  $\lambda_1$  è una soluzione dell'equazione omogenea associata si ha che

$$e^{\alpha t} \left( a \frac{d^2}{dt^2} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + b \frac{d}{dt} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + c (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \right) = 0.$$

Sfruttiamo la linearità della derivata per separare la parte immaginaria dalla parte reale e ottenere un sistema di due equazioni a coefficienti reali:

$$\begin{cases} a \left( \frac{d^2}{dt^2} \cos(\beta t) + b \frac{d}{dt} \cos(\beta t) + c \cos(\beta t) \right) = 0 \\ a \left( \frac{d^2}{dt^2} \sin(\beta t) + b \frac{d}{dt} \sin(\beta t) + c \sin(\beta t) \right) = 0 \end{cases}.$$

Se avessimo considerato  $\lambda_2$  avremmo ottenuto lo stesso sistema: i due generatori quindi sono effettivamente  $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$  e  $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ .

## 9.10 † EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI DEL SECONDO ORDINE NON OMOGENEE

**ESERCIZIO.**

Sia data l'equazione differenziale non omogenea

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad (9.15)$$

con  $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua. Determinare l'insieme delle soluzioni.

In questo caso l'insieme delle soluzioni sarà uno spazio affine di dimensione 2. Detti  $G_1$  e  $G_2$  due generatori linearmente indipendenti dell'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea  $ay'' + by' + cy = 0$ , allora le soluzioni saranno del tipo:

$$\varphi = k_1 G_1 + k_2 G_2 + \varphi_0 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

con  $\varphi_0$  soluzione particolare dell'equazione data. Si pone pertanto il problema di trovare una soluzione particolare. A tale proposito ci sono principalmente due metodi di risoluzione.

### 9.10.1 Metodo di variazione delle costanti arbitrarie

**PROPOSIZIONE 9.10.1. (METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI).**

Siano  $c_1(t), c_2(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  e  $G_1(t), G_2(t)$  due generatori linearmente indipendenti dell'insieme delle soluzioni. È possibile determinare una soluzione particolare  $\varphi_0(t)$  dell'equazione (9.15) associata

risolvendo il sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)G_1'(t) + c_2'(t)G_2'(t) = \frac{f(t)}{a} \\ c_1'(t)G_1(t) + c_2'(t)G_2(t) = 0 \end{cases} . \quad (9.16)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\varphi$  una funzione<sup>a</sup> della forma

$$\varphi = c_1G_1 + c_2G_2 .$$

Dobbiamo mostrare che  $\varphi$  risolve l'equazione (9.15): derivando si ottiene

$$\varphi' = c_1G_1' + c_1'G_1 + c_2'G_2 + c_2G_2' ;$$

inoltre se  $c_1$  e  $c_2$  risolvono il sistema devono verificare la seconda equazione, quindi

$$c_1'G_1 + c_2'G_2 = 0 \implies \varphi' = c_1G_1' + c_2G_2' .$$

Derivando  $\varphi$  ancora una volta e utilizzando la prima equazione del sistema, otteniamo

$$\varphi'' = c_1G_1'' + c_1'G_1' + c_2'G_2' + c_2G_2'' = c_1G_1'' + \frac{f(t)}{a} + c_2G_2'' .$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza ricaviamo

$$a \cdot (c_1G_1'' + \frac{f(t)}{a} + c_2G_2'') + b \cdot (c_1G_1' + c_2G_2') + c \cdot (c_1G_1 + c_2G_2) = f(t)$$

e raccogliendo concludiamo che

$$c_1(aG_1'' + bG_1' + cG_1) + c_2(aG_2'' + bG_2' + cG_2) = 0 ,$$

ma  $G_1$  e  $G_2$  risolvono quest'ultima equazione essendo le funzioni generatrici dell'insieme di soluzioni dell'equazione differenziale omogenea, pertanto  $\varphi$  è una soluzione dell'equazione iniziale.  $\square$

<sup>a</sup>Nella dimostrazione omettiamo la dipendenza da  $t$  per facilitare la lettura.

**ESEMPIO.** Consideriamo

$$y'' - y = x. \quad (9.17)$$

Risolviamo l'equazione omogenea associata  $y'' - y = 0$ . I generatori sono della forma  $e^{\lambda t}$ , quindi sostituendo nell'omogenea ricaviamo

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - e^{\lambda t} = 0 .$$

Dividendo per  $e^{\lambda t}$ , essendo certamente non nullo, troviamo  $\lambda^2 - 1 = 0$ , dunque  $\lambda = \pm 1$ . Di conseguenza i miei generatori sono  $G_1 = e^{-x}$  e  $G_2 = e^x$ . Applichiamo ora il metodo di variazione delle costanti arbitrarie:

$$\begin{cases} c_1'(-e^{-x}) + c_2'e^x = x \\ c_1'e^{-x} + c_2'e^x = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -c_1' e^{-x} + c_2' e^x = x \\ -c_1' e^{-x} = c_2' e^x \end{cases}.$$

Possiamo sostituire sopra  $-c_1' e^{-x}$ :

$$\begin{cases} c_2' e^x + c_2' e^x = x \\ c_1' = -c_2' e^{2x} \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} c_2' = \frac{x}{2} e^{-x} \\ c_1' = -\frac{x}{2} e^x \end{cases}.$$

Integrando per parti otteniamo

$$c_1 = \left| -\frac{t}{2} e^t \right|_0^x + \int_0^x \frac{e^t}{2} dt = \frac{e^x - x e^x}{2} + k_1;$$

$$c_2 = \left| -\frac{t}{2} e^{-t} \right|_0^x + \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} dt = -\frac{e^{-x} + x e^{-x}}{2} + k_2.$$

La soluzione particolare è

$$\varphi = \frac{1-x}{2} - \frac{1+x}{2}$$

e le soluzioni saranno dunque

$$c_1 e^{-x} + c_2 e^x = \frac{1-x}{2} - \frac{1+x}{2} + e^{-x} k_1 + e^x k_2 = -x + e^{-x} k_1 + e^x k_2$$

con  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ .

**ATTENZIONE!** Questo metodo è piuttosto laborioso; spesso può essere più rapido utilizzare il **metodo di somiglianza** che vedremo fra poco. In questo caso si poteva notare ancor prima di procedere nella risoluzione che  $y = -x$  è soluzione di (9.17).

### 9.10.2 Metodo di somiglianza

#### PROPOSIZIONE 9.10.2. (METODO DI SOMIGLIANZA).

Sia data l'equazione differenziale (9.15). Se

$$\text{I: } f(x) = p_n(x) e^{\mu x} \sin(\theta x) \quad \text{o} \quad \text{II: } f(x) = p_n(x) e^{\mu x} \cos(\theta x)$$

con  $\theta, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $p_n(x)$  un polinomio di grado  $n$ , si cerca una soluzione particolare  $\varphi_0$  del tipo

$$\varphi_0(x) = x^m (q_{1,n}(x) e^{\mu x} \sin(\theta x) + q_{2,n}(x) e^{\mu x} \cos(\theta x))$$

dove  $q_{1,n}, q_{2,n}$  sono due polinomi di grado  $n$  e  $m = 0$  tranne nei seguenti casi, dipendenti anche dal discriminante  $\Delta$  di  $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ :

- $\Delta > 0$ ,  $\theta = 0$  e  $\mu$  coincide con una delle radici reali di  $p(\lambda)$ . Allora si pone  $m = 1$ ;
- $\Delta = 0$ ,  $\theta = 0$  e  $\mu$  coincide con l'unica radice reale di  $p(\lambda)$ . Allora si pone  $m = 2$ ;
- $\Delta < 0$ ,  $p(\lambda)$  ha radici  $\lambda_{\pm} = \alpha \pm \beta \theta = 0$  e  $\mu = \alpha$ ,  $\theta = \beta$ . Allora si pone  $m = 1$ .

**OSSERVAZIONE.** Il metodo di somiglianza è particolarmente comodo nei seguenti casi particolari:

$$\begin{aligned} f(x) = p_n(x) & \quad \text{di tipo I con } \mu = \theta = 0; \\ f(x) = e^{\mu x} & \quad \text{di tipo I con } n = \theta = 0; \\ f(x) = \sin(x) & \quad \text{di tipo I con } \mu = n = 0. \end{aligned}$$

### 9.11 † OSCILLATORE ARMONICO

**ESERCIZIO.** Studiare l'equazione differenziale omogenea del secondo ordine:

$$mx''(t) = -kx(t) - \gamma x'(t) \quad k, \gamma > 0$$

che descrive la posizione  $x(t)$  di un corpo di massa  $m$  vincolato a muoversi lungo una guida rettilinea sotto l'azione di una molla di costante elastica  $k$  con posizione di equilibrio  $x = 0$  e dell'attrito  $-\gamma x'(t)$ .

**SOLUZIONE.** Dividendo per  $m$  otteniamo

$$x'' + \frac{\gamma}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

Denotiamo

$$\begin{cases} \omega^2 := \frac{k}{m} \\ \delta := \frac{\gamma}{2m} \end{cases} .$$

Con queste sostituzioni riscriviamo l'equazione come

$$x'' + 2\delta x' + \omega^2 x = 0$$

e distinguiamo dunque tre casi, in base alle radici  $\lambda_{\pm} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$  del polinomio associato  $p(\lambda)$ :

1.  $\delta > \omega$ .  $p(\lambda)$  ha due radici reali, distinte ed entrambe negative; le soluzioni in questo caso sono

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Osserviamo che  $x(t) \rightarrow 0$  esponenzialmente per  $t \rightarrow \infty$ : da un punto di vista fisico,  $\delta > \omega$  significa che il l'attrito prevale sulla forza elastica e il corpo si ferma rapidamente.

2.  $\delta = \omega$ .  $p(\lambda)$  ha una sola radice  $\lambda = -\delta$  e le soluzioni sono

$$x(t) = c_1 e^{-\delta t} + c_2 t e^{-\delta t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

3.  $\delta < \omega$ .  $p(\lambda)$  ha due radici complesse

$$-\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

e le soluzioni sono

$$x(t) = c_1 e^{-\delta t} \cos\left(t\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right) + c_2 e^{-\delta t} \sin\left(t\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Poniamo  $\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ : dividendo e moltiplicando per  $r = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  otteniamo

$$x(t) = re^{-\delta t} \left( \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos(\bar{\omega}t) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin(\bar{\omega}t) \right).$$

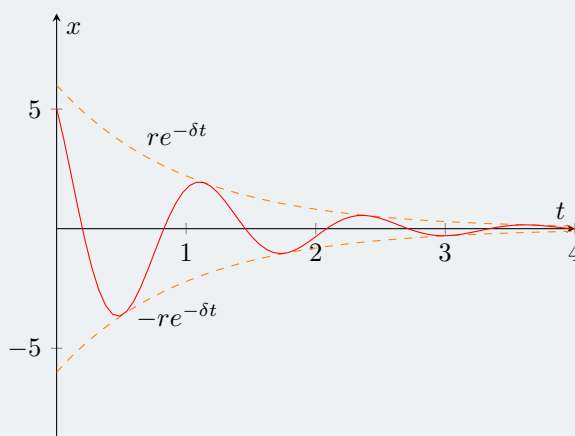
Sia infine  $\varphi \in [0, 2\pi]$  tale che:

$$\cos \varphi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}};$$

concludiamo, utilizzando le formule di addizione

$$x(t) = re^{-\delta t} (\cos \varphi \cos(\bar{\omega}t) + \sin \varphi \sin(\bar{\omega}t)) = re^{-\delta t} \cos(\bar{\omega}t + \varphi).$$

Le soluzioni oscillano tra i grafici di  $re^{-\delta t}$  e  $-re^{-\delta t}$  e tendono a 0 per  $t \rightarrow \infty$ .



# INTEGRALI MULTIPLI

---

“Ora cosa facciamo? Improvvisiamo e speriamo che ci vada bene.”

EZIO VENTURINO, *ottimista*.

IL CALCOLO di aree e volumi è uno dei più antichi problemi matematici, di grande importanza teorica e pratica; con l'integrale di Riemann abbiamo risolto<sup>1</sup> il primo dei due problemi: possiamo estendere la teoria di Riemann a più dimensioni? La risposta è sì: inizieremo lavorando con funzioni  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  per poi generalizzarla in  $\mathbb{R}^n$ .

Siamo portati in maniera naturale a definire l'integrale su insiemi “semplici”: i **rettangoli chiusi**, prodotti cartesiani di quegli intervalli chiusi su cui abbiamo fondato la teoria per funzioni  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

## 10.1 DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE DOPPIO

Siano  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $[c, d] \subset \mathbb{R}$  e sia  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Sia infine  $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ . Consideriamo delle partizioni di  $[a, b]$  e  $[c, d]$ ,

$$\begin{aligned} P_1: & \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ P_2: & \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d, \end{aligned}$$

e chiamiamo  $\mathcal{P}(R)$  l'insieme delle suddivisioni del rettangolo  $R$  della forma

$$\mathcal{P}(R) = \{(P_1, P_2) \mid P_1 \in \mathcal{P}([a, b]), P_2 \in \mathcal{P}([c, d])\}.$$

---

<sup>1</sup>Se siamo capaci di trovare una funzione tale che l'area sottesa al suo grafico sia quella dell'oggetto che vogliamo calcolare, se siamo in grado di determinare una primitiva della suddetta funzione, se i metodi numerici che abbiamo inevitabilmente utilizzato – quando ci siamo accorti che non siamo in grado di trovare la primitiva – non danno errori di cancellazione, *overflow*, *underflow* o magari convergono sì, ma non a quella *dannata* area che stiamo cercando; a parte questo sì, abbiamo risolto il problema.

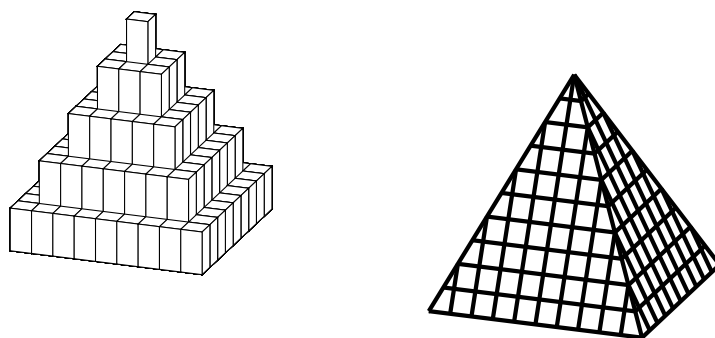


FIGURA 10.1 – Approssimazione alla Riemann del volume di una piramide.

Una partizione  $P \in \mathcal{P}(R)$  divide un rettangolo in  $n \times m$  rettangolini più piccoli. Posto  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  e posto  $A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$  area del rettangolino associato, definiamo

$$m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f(x, y);$$

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f(x, y).$$

La **somma inferiore** e la **somma superiore** saranno quindi

$$s(P, f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) = \sum_{i,j} m_{ij}A_{ij};$$

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) = \sum_{i,j} M_{ij}A_{ij}.$$

Dato  $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in R_{ij}$  si definisce **somma integrale di Riemann**

$$\sigma(P; (\xi_{ij}, \eta_{ij})) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})A_{ij}$$

e per ogni partizione vale

$$s(P) < \sigma(P; (\xi_{ij}, \eta_{ij})) < S(P).$$

#### DEFINIZIONE 10.1.1. (FUNZIONE RIEMANN-INTEGRABILE).

Una funzione  $f$  si dice **Riemann-integrabile** su  $R$  se

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} s(P) = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(P).$$

In tal caso, il valore comune viene detto **integrale** di  $f$  su  $\mathbb{R}$  e si indica con

$$\iint_R f(x, y) dx dy.$$

**NOTAZIONE.** Denotiamo con  $\mathcal{R}(R; \mathbb{R})$  l'insieme delle funzioni Riemann-integrabili da un dominio  $R$  a valori in  $\mathbb{R}$ .

In modo analogo al caso unidimensionale, possiamo definire una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità di una funzione di più variabili.

**PROPOSIZIONE 10.1.1. (CRITERIO DI CAUCHY).**

Una funzione limitata  $f: R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è Riemann-integrabile se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R) \text{ tale che } S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

**DIMOSTRAZIONE.**

$\Rightarrow$ ) Osserviamo che aggiungendo punti ad una qualsiasi partizione  $P$  la somma inferiore  $s$  cresce e la somma superiore  $S$  decresce. Siano quindi  $P^-$  e  $P^+$  due partizioni per cui, fissato  $\varepsilon > 0$ , valga

$$s(P^-) > \sup_{P \in \mathcal{P}} s(P) - \frac{\varepsilon}{2}; \quad S(P^+) < \inf_{P \in \mathcal{P}} S(P) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poniamo  $P_\varepsilon = P^- \cup P^+$  e, utilizzando l'osservazione iniziale, otteniamo

$$s(P_\varepsilon) \geq s(P^-) > \sup_{P \in \mathcal{P}} s(P) - \frac{\varepsilon}{2}; \quad S(P_\varepsilon) \leq S(P^+) < \inf_{P \in \mathcal{P}} S(P) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'integrabilità di  $f$  implica che  $\inf_{P \in \mathcal{P}} S(P) = \sup_{P \in \mathcal{P}} s(P)$ ; inoltre, avvalendoci delle considerazioni precedenti, concludiamo che

$$S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) < \inf_{P \in \mathcal{P}} S(P) - \sup_{P \in \mathcal{P}} s(P) + \varepsilon = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ ) Fissato  $\varepsilon > 0$ , se esiste  $P_\varepsilon \in \mathcal{P}$  tale che  $S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$  allora  $S(P_\varepsilon, f) < s(P_\varepsilon, f) + \varepsilon$ , quindi

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} S(P) \leq S(P_\varepsilon) < s(P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \sup_{P \in \mathcal{P}} s(P) + \varepsilon$$

e se  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ha

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} S(P) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}} s(P) \implies \inf_{P \in \mathcal{P}} S(P) = \sup_{P \in \mathcal{P}} s(P)$$

poiché la disuguaglianza nel verso opposto vale sempre per definizione.  $\square$

**DEFINIZIONE 10.1.2. (AMPIEZZA DI UNA SUDDIVISIONE).**

Definiamo l'**ampiezza**  $\delta$  di una suddivisione  $P \in \mathcal{P}$  come

$$\delta = \delta(P) = \max_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}.$$

**DEFINIZIONE 10.1.3. (INTEGRALE DI CAUCHY).**

Data una somma integrale  $\sigma(P; (\xi_{ij}, \eta_{ij}))$ , se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{\delta} > 0 : \forall P \in \mathcal{P}(R) : \delta(P) < \bar{\delta}, \forall (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \implies |\sigma(P; (\xi_{ij}, \eta_{ij})) - \mathcal{J}| < \varepsilon$$

definiamo  $\mathcal{J}$  **integrale di Cauchy** e si ha che

$$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sigma(P; (\xi_{ij}, \eta_{ij})) = \mathcal{J}. \quad (\text{IO.I})$$

Una conseguenza immediata di questa definizione è il seguente teorema.

**TEOREMA IO.I.1. (INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI LIMITATE).**

Una funzione  $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$  limitata è integrabile su  $R$  se e solo se esiste finito il limite (IO.1).  $\square$

**TEOREMA IO.I.2. (LE FUNZIONI CONTINUE SONO INTEGRABILI).**

Se una funzione  $f$  è continua allora è integrabile:

$$f \in \mathcal{C}^0(R; \mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{R}(R; \mathbb{R}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Una funzione  $f$  continua su rettangolo  $R$ , che è un insieme compatto, è uniformemente continua:

$$\forall \varepsilon, \exists \bar{\delta} > 0 : \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \bar{\delta} \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{|R|}$$

con  $|R| = (b - a)(d - c)$  area del rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$ . Sia  $P$  una suddivisione con  $\delta(P) < \bar{\delta}$ . Allora

$$M_{ij} - m_{ij} = \max_{R_{ij}} f - \min_{R_{ij}} f < \frac{\varepsilon}{|R|} :$$

ciò implica

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{ij} - m_{ij}) |R_{ij}| < \frac{\varepsilon}{|R|} \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |R_{ij}|}_{|R|} = \varepsilon$$

e, utilizzando il *criterio di Cauchy* si ha la tesi.  $\square$

**ESEMPIO (FUNZIONE NON RIEMANN-INTEGRABILE SU  $R$ ).**

Sia

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{IO.2})$$

Osserviamo che  $S(P) - s(P) = 1 \forall P \in \mathcal{P}$ : per il *criterio di Cauchy* la funzione  $f$  così definita non è Riemann-integrabile.

**10.2 FORMULE DI RIDUZIONE**

**INTUITIVAMENTE...** L'idea di fondo del *teorema sulle formule di riduzione* che stiamo per presentare è quella di approssimare l'integrale doppio valutando singolarmente i contributi delle due variabili. Consideriamo una partizione formata da rettangoli  $R_{ij}$  con punto base  $(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(y_i - y_{i-1}) \right) (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx \sum_{i=1}^n \left( \int_c^d f(\xi_{ij}, y) dy \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n H(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \cong \int_a^b H(x) dx \end{aligned}$$

con  $H(x)$  l'integrale dipendente dal parametro  $x$ :

$$H(x) := \int_c^d f(x, y) dy.$$

**TEOREMA IO.3.1. (DI RIDUZIONE).**

Sia  $f \in \mathcal{R}(R)$ ,  $R = [a, b] \times [c, d]$ .

- Supponiamo che  $\forall y \in [c, d]$ ,  $f(\cdot, y) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Allora la funzione

$$y \mapsto G(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

è a sua volta Riemann-integrabile su  $[c, d]$ . Inoltre si ha

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

- Supponiamo che  $\forall x \in [a, b]$ ,  $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}([c, d])$ . Allora la funzione

$$x \mapsto H(x) := \int_c^d f(x, y) dy$$

è a sua volta Riemann-integrabile su  $[a, b]$ . Inoltre si ha

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b H(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

**NOTAZIONE.** Spesso si antepone la variabile d'integrazione integrata per seconda:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo il primo punto, dato che la dimostrazione del secondo punto è analoga. Sia  $P \in \mathcal{P}(R)$ ,  $P = (P_1, P_2)$ ,  $G(y) := \int_a^b f(x, y) dx$  e  $I_{x_i} = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $I_{y_j} = [y_{j-1}, y_j]$ . Consideriamo la somma superiore

$$S(P_2, G) = \sum_{j=1}^m \sup_{y \in I_{y_j}} G(y)(y_j - y_{j-1}).$$

Osserviamo che

$$\sup_{y \in I_{y_j}} G(y) = \sup_{y \in I_{y_j}} \int_a^b f(x, y) dx$$



$$\begin{aligned} & \leq \sup_{y \in I_{y_j}} \overbrace{\sum_{i=1}^n \sup_{x \in I_{x_i}} f(x, y)(x_i - x_{i-1})}^{s(P_1, f(\cdot, y))} \\ & \leq \sum_{i=1}^n \sup_{R_{ij}} f(x, y)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che  $S(P_2, G) \leq S((P_1, P_2), f)$ . Viceversa, la somma inferiore è

$$s(P_2, G) = \sum_{j=1}^m \inf_{y \in I_{y_j}} G(y)(y_j - y_{j-1}).$$

In maniera simile alla somma superiore si ha:

$$\begin{aligned} \inf_{y \in I_{y_j}} G(y) &= \inf_{y \in I_{y_j}} \int_a^b f(x, y) dx \\ & \geq \inf_{y \in I_{y_j}} \overbrace{\sum_{i=1}^n \inf_{x \in I_{x_i}} f(x, y)(x_i - x_{i-1})}^{s(P_1, f(\cdot, y))} \\ & \geq \sum_{i=1}^n \inf_{R_{ij}} f(x, y)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che  $s(P_2, G) \geq s((P_1, P_2), f)$ . Essendo  $f$  integrabile, per il *criterio di Cauchy* si ha che:

$$S(P_2, G) - s(P_2, G) \leq S((P_1, P_2), f) - s((P_1, P_2), f) < \varepsilon$$

quindi per lo stesso criterio  $G(y)$  è integrabile. Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned} \sup_{P_2 \in \mathcal{P}([c, d])} s(P_2, G) &\geq \sup_{(P_1, P_2) \in \mathcal{P}(R)} s((P_1, P_2), f) \\ \inf_{P_2 \in \mathcal{P}([c, d])} S(P_2, G) &\leq \inf_{(P_1, P_2) \in \mathcal{P}(R)} S((P_1, P_2), f), \end{aligned}$$

che implica

$$\int_c^d G(y) dy = \iint_R f(x, y) dx dy. \quad \square$$

**COROLLARIO 10.3.I. (INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE).**

Se  $f(x, y) \in \mathcal{C}^0(R)$  allora  $f(x, y) \in \mathcal{R}(R)$  e

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad \square$$

**ESERCIZIO.** Calcolare il seguente integrale:

$$J = \int_0^3 \int_1^2 x^2 y^3 dy dx.$$

**SOLUZIONE.**

$$H(x) = \int_1^2 x^2 y^3 dy = x^2 \int_1^2 y^3 dy = x^2 \frac{1}{4} y^4 \Big|_1^2 = \frac{15}{4} x^2$$

$$\int_0^3 H(x) dx = \int_0^3 \frac{15}{4} x^2 dx = \frac{15}{4} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3 = \frac{135}{4}.$$

oppure

$$G(y) = \int_0^3 x^2 y^3 dx = y^3 \int_0^3 x^2 dx = y^3 \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3 = 9y^3$$

$$\int_1^2 G(y) dy = \int_1^2 9y^3 dy = 9 \frac{1}{4} y^4 \Big|_1^2 = \frac{135}{4}.$$

**ESERCIZIO.** Calcolare l'integrale

$$\iint \cos(x+y) dx dy$$

con  $(x, y) \in [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$ .**SOLUZIONE.**

$$H(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+y) dy = \sin(x+y) \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} H(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin(x) dx = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} + \cos x \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$

Poiché  $x$  e  $y$  sono interscambiabili in questo caso, il calcolo dell'integrale cambiando l'ordine delle variabili è lo stesso.**10.4 TEORIA DELLA MISURA**

Dato un insieme  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  generico, che non sia necessariamente un rettangolo, vorremmo calcolare l'integrale di una qualsiasi funzione limitata  $f(x, y) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ , cercando di utilizzare le conoscenze che abbiamo finora acquisito. Consideriamo allora un rettangolo  $R$  tale che  $D \subseteq R$  e definiamo  $\bar{f}(x, y) : D \longrightarrow \mathbb{R}$  nel seguente modo:

$$\bar{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R \setminus D \end{cases} \quad (10.3)$$

**DEFINIZIONE 10.4.I. (FUNZIONE INTEGRABILE SU UN INSIEME GENERICO).**Diciamo che  $f$  è **Riemann-integrabile** su  $D$  se  $\bar{f} \in \mathcal{R}(R)$ , con  $\bar{f}, D$  e  $R$  definiti in (10.3). In

questo caso poniamo

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R \bar{f}(x, y) dx dy .$$

#### OSSERVAZIONI.

1. La definizione non dipende dal rettangolo  $R$ .
2. La funzione  $\bar{f}$  generalmente *non* è continua in  $R$ .

#### DEFINIZIONE 10.4.2. (INSIEME MISURABILE - FUNZIONE CARATTERISTICA).

Diciamo che un insieme  $D$  è **misurabile secondo Peano-Jordan** se la sua funzione caratteristica

$$\mathbb{I}_D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è Riemann-integrabile. In tal caso poniamo

$$|D| = \iint_D dx dy = \iint_R \mathbb{I}_D(x, y) dx dy .$$

#### DEFINIZIONE 10.4.3. (INSIEME MISURABILE - AREE DEI POLIGONI APPROSSIMANTI).

Diciamo che un insieme  $D$  è **misurabile secondo Peano-Jordan** se l'estremo superiore delle aree dei poligoni contenuti in  $D$  coincide con l'estremo inferiore delle aree dei poligoni contenenti  $D$ .

#### PROPOSIZIONE 10.4.1. (CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI DI MISURA NULLA).

Un insieme  $Z \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato ha misura nulla se e solo se esistono  $N$  rettangoli  $R_1, \dots, R_N$  tali che:

1.  $Z \subseteq \bigcup_{i=1}^N R_i$  ;
2.  $\forall \varepsilon > 0, \sum_{i=1}^N |R_i| < \varepsilon$  .

#### DIMOSTRAZIONE.

$\Rightarrow$ ) Sia  $Z \subseteq R$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $P_\varepsilon$  una partizione di  $R$  tale che  $S(P_\varepsilon, \mathbb{I}_Z) < \varepsilon$ . Poiché  $Z$  ha misura nulla, si ha che

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} s(P, \mathbb{I}_Z) = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(P, \mathbb{I}_Z) = 0 .$$

Per definizione  $\mathbb{I}_Z$  è una funzione *non* nulla solo nelle regioni in cui i rettangolini  $R_{ij}$  hanno intersezione non vuota con l'insieme, quindi concludiamo che

$$\sum_{R_{ij} \cap Z \neq \emptyset} |R_{ij}| = S(P_\varepsilon, \mathbb{I}_Z) < \varepsilon .$$

$\Leftarrow$ ) Fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono  $R_1, \dots, R_N$  tali che valgano 1. e 2. Consideriamo allora al variare di  $\varepsilon$  una suddivisione  $P_\varepsilon$  del rettangolo  $R \supseteq Z$  che includa le coordinate dei vertici,

ovvero una suddivisione che contenga tutti i rettangoli  $R_i$ . Allora vale

$$S(P_\varepsilon, \mathbb{I}_Z) = \sum_{i=1}^N |R_i| < \varepsilon \implies S(P_\varepsilon, \mathbb{I}_Z) - s(P_\varepsilon, \mathbb{I}_Z) < \varepsilon \quad \forall P_\varepsilon$$

ovvero  $Z$  è misurabile e, essendo  $0 \leq s(P_\varepsilon, \mathbb{I}_Z) \leq S(P_\varepsilon, \mathbb{I}_Z) < \varepsilon$ ,  $Z$  ha misura nulla.  $\square$

**PROPOSIZIONE 10.4.2. (CARATTERIZZAZIONE DELLA MISURABILITÀ DI UN INSIEME LIMITATO).**

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un insieme limitato. Allora  $D$  è misurabile se e solo se  $\partial D$  è misurabile e  $|\partial D| = 0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e consideriamo un qualunque  $P \in \mathcal{P}(R)$ . Per definizione abbiamo che

$$S(P, \mathbb{I}_D) - s(P, \mathbb{I}_D) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{ij} - m_{ij}) |R_{ij}|$$

con

$$M_{ij} - m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \overline{R_{ij}} \cap \partial D \neq \emptyset; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi, detti  $\tilde{R}_i$  i rettangolini  $R_{ij}$  tali che  $\overline{R_{ij}} \cap \partial D \neq \emptyset$ , osserviamo che

$$S(P, \mathbb{I}_D) - s(P, \mathbb{I}_D) < \varepsilon \iff \sum_{i=1}^N |\tilde{R}_i| < \varepsilon$$

ovvero  $\mathbb{I}_D$  è integrabile per il *criterio di Cauchy* se e solo se  $|\partial D| = 0$ , per la proposizione 10.4.1.  $\square$

**OSSERVAZIONE.** Riprendiamo la funzione (10.2),  $f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che, detto  $\tilde{Q}$  l'insieme immagine di  $f$ , l'area della frontiera  $\partial \tilde{Q}$  è diversa da zero (non è misurabile), confermando la non integrabilità della funzione data. Inoltre, si noti che l'insieme dei punti di  $\partial \tilde{Q}$  è unione di una quantità infinita e numerabile di insiemi di misura nulla: l'unione di infiniti insiemi di misura nulla può avere misura *non nulla*.

**ESERCIZIO.** Dimostra che

$$D \text{ è misurabile} \iff \overline{D}, \overset{\circ}{D}, \partial D \text{ sono misurabili e } |\overline{D}| = |\overset{\circ}{D}|.$$

**OSSERVAZIONE.** Se  $D_1$  e  $D_2$  sono misurabili allora anche  $D_1 \cup D_2$  è misurabile e  $D_1 \cap D_2$  sono misurabili. Vale inoltre

$$|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2| - |D_1 \cap D_2|.$$

Non vale però il viceversa: ad esempio  $[0, 1] \times [0, 1]$  è misurabile ma

$$[0, 1] \times [0, 1] = \partial\tilde{Q} \cup (([0, 1] \times [0, 1]) \setminus \partial\tilde{Q})$$

con  $\partial\tilde{Q}$  definita nell'osservazione di pag. 155 non è misurabile.

**PROPOSIZIONE IO.4.3. (MISURABILITÀ DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE).**

Sia  $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  limitata e integrabile. Allora il suo grafico

$$\Gamma_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y = g(x)\}$$

ha misura di Peano-Jordan nulla.

**DIMOSTRAZIONE.** Utilizziamo il *criterio di Cauchy* per gli integrali di funzioni di una variabile

$$g \in \mathcal{R}([a, b]) \iff \forall \varepsilon \exists P_\varepsilon : S(P_\varepsilon, g) - s(P_\varepsilon, g) < \varepsilon;$$

ma  $\Gamma_g \subseteq S(P_\varepsilon, g) - s(P_\varepsilon, g)$  per definizione di somma superiore e inferiore, quindi detti  $R_i$  i rettangolini differenza tra la somma superiore e la somma inferiore si ha che:

$$\Gamma_g \subseteq S(P_\varepsilon, g) - s(P_\varepsilon, g) = \bigcup_{i=1}^N R_i < \varepsilon$$

e per la proposizione IO.4.1 si ha la tesi. □

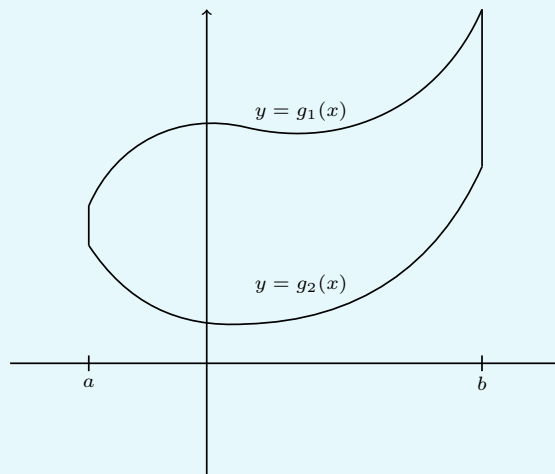
IO.4.1 *Regioni semplici*

**DEFINIZIONE IO.4.4. (REGIONE  $y$ -SEMPLICE).**

Un sottoinsieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con  $g_1, g_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  si dice **semplice rispetto all'asse  $y$**  o  **$y$ -semplice**.



**DEFINIZIONE 10.4.5. (REGIONE  $x$ -SEMPLICE).**

Un sottoinsieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

con  $h_1, h_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$  si dice **semplice rispetto all'asse  $x$  o  $x$ -semplice**.

**OSSERVAZIONE.** Se le funzioni  $g_i$  hanno delle discontinuità di prima specie si include il segmento che congiunge i due punti del salto e se  $g_1(a) \neq g_2(a)$  o  $g_1(b) \neq g_2(b)$  si include il segmento  $[g_1(a), g_2(a)]$  o  $[g_1(b), g_2(b)]$ , “chiudendo” l'insieme  $D$ . Vale una proprietà analoga per le  $h_i$  nel caso  $x$ -semplice.

**ESERCIZIO.** Dimostrare che se  $D$  è  $y$ -semplice e  $g_1$  e  $g_2$  sono Riemann-integrabili allora  $\partial D$  ha misura nulla,  $D$  è misurabile e

$$|D| = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx.$$

**SOLUZIONE.**

<sup>a</sup> Quella che segue è una risoluzione proposta dagli autori. Da 10.4.3 sappiamo che  $\Gamma_{g_1}, \Gamma_{g_2}$  hanno misura nulla, quindi se  $g_1(a) = g_2(a)$  e  $g_1(b) = g_2(b)$  possiamo concludere immediatamente che  $\partial D$  ha misura nulla. Altrimenti, supponendo che  $g_1(a) \neq g_2(a)$  – gli altri due casi sono analoghi – definiamo

$$\begin{array}{ccc} r_a : [g_1(a), g_2(a)] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1-t)g_1(a) + tg_2(a) \end{array}$$

Osserviamo che  $r_a(t)$  è continua su un compatto, quindi integrabile:  $\Gamma_{r_a(t)}$  ha pertanto misura nulla. Quindi, eventualmente definendo allo stesso modo anche – o soltanto! –  $r_b(t)$ , possiamo concludere che

$$|\partial D| = |\Gamma_{g_1} \cup \Gamma_{g_2} \cup \Gamma_{r_a(t)} \cup \Gamma_{r_b(t)}| = 0.$$

Da 10.4.2  $D$  è misurabile e possiamo calcolarne la misura integrando la sua funzione caratteristica:

$$|D| = \iint_D \mathbb{I}_D = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx.$$

<sup>a</sup>

**DEFINIZIONE 10.4.6. (FUNZIONE GENERALMENTE CONTINUA).**

Una funzione  $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  si dice **generalmente continua** su  $R$  se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura di Peano-Jordan nulla.

**ESEMPI (DI FUNZIONI GENERALMENTE CONTINUE).**

- La funzione caratteristica  $\mathbb{I}_D$  dove  $D$  è un insieme.

- Se  $D \subseteq R$  è un insieme misurabile e  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, allora la funzione

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D; \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$$

è generalmente continua.

**TEOREMA IO.4.I. (INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI LIMITATE GENERALMENTE CONTINUE).**

Sia  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e generalmente continua in  $R$ . Allora  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $R$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $Z \subseteq R$  l'insieme dei punti di discontinuità di  $f$  e  $M \in \mathbb{R}$  tale che valga  $|f(x, y)| \leq M$ , in quanto  $f$  è limitata per ipotesi. Utilizziamo il *criterio di Cauchy*: fissiamo  $\varepsilon > 0$  e consideriamo una partizione  $P$  tale che  $Z$  sia ricoperto da un numero finito di rettangolini  $Q_1, \dots, Q_N$  di area complessiva inferiore a  $\frac{\varepsilon}{2M}$ . Raddoppiamo l'area dei  $Q_i$  e abbiamo che

$$Z \subseteq \bigcup_{i=1}^N \overset{\circ}{Q}_i$$

e

$$\sum_{i=1}^N |Q_i| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

La funzione  $f$  è continua sul compatto  $R \setminus \bigcup_{i=1}^N \overset{\circ}{Q}_i$ , quindi uniformemente continua:

$$\exists \delta : \delta(P) < \delta \text{ e } R_{ij} \cap \overset{\circ}{Q}_i = \emptyset \implies M_{ij} - m_{ij} < \frac{\varepsilon}{|R|} \forall i, j.$$

Eventualmente scegliendo una partizione più fine di  $P$ , possiamo assumere che i vertici dei  $Q_i$  appartengano a  $P$ . Per una tale partizione, detti  $\tilde{R}_i \subseteq \overset{\circ}{Q}_i$  i rettangolini contenuti nei rettangoli che contengono  $Z$ , si ha

$$\begin{aligned} S(P, f) - s(P, f) &= \sum_{ij} M_{ij} - m_{ij} |R_{ij}| \\ &= \sum_{\tilde{R}_i} M_{ij} - m_{ij} |R_{ij}| + \sum_{R \setminus \bigcup_i \tilde{R}_i} M_{ij} - m_{ij} |R_{ij}| \\ &< (M - m) \sum_{i=1}^N |Q_i| + \frac{\varepsilon}{|R|} \sum_{R \setminus \bigcup_i \tilde{R}_i} |R_{ij}| \\ &< M \frac{\varepsilon}{M} + |R| \frac{\varepsilon}{|R|} = 2\varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

**PROPOSIZIONE IO.4.4. (INTEGRABILITÀ SU UNIONI DI APERTI).**

Siano  $\Omega_1, \Omega_2$  aperti misurabili tali che  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  abbia misura nulla. Se  $f$  è limitata su  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  e integrabile su  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  separatamente allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$  e

$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y) dx dy. \quad (\text{IO.4})$$

**DIMOSTRAZIONE.** Estendiamo  $f$  sul rettangolo  $R \supset \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Sappiamo per ipotesi che  $f \mathbb{I}_{\Omega_1}$ ,  $f \mathbb{I}_{\Omega_2}$  e  $f \mathbb{I}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$  sono integrabili: estendendo  $f$  al rettangolo  $R$  queste funzioni rimangono integrabili e vale

$$f \mathbb{I}_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = f \mathbb{I}_{\Omega_1} + f \mathbb{I}_{\Omega_2} - f \mathbb{I}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}.$$

Osservando infine che poiché  $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$  si ha

$$\iint_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x, y) dx dy = 0. \quad \square$$

**COROLLARIO 10.4.1. (INTEGRABILITÀ SUGLI APERTI DI UN'UNIONE).**

Se  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  con  $\Omega$ ,  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  misurabili,  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  e  $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$  allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$  e  $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$  e vale (10.4).  $\square$

**PROPOSIZIONE 10.4.5. (INTEGRABILITÀ SU UNA REGIONE  $y$ -SEMPLICE).**

Sia

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}, \quad g_1, g_2 \in \mathcal{R}([a, b])$$

e  $\forall x f(x, \cdot) \in \mathcal{R}([g_1(x), g_2(x)])$ . Allora:

$$f \in \mathcal{R}(\Omega) \text{ e } \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

**DIMOSTRAZIONE.** È una conseguenza diretta del *teorema di riduzione* applicato alla funzione  $f$  estesa a un opportuno rettangolo  $R \supset \Omega$ . La funzione estesa soddisfa le ipotesi del teorema di riduzione grazie alle ipotesi adottate.  $\square$

#### 10.4.2 Insiemi semplicemente decomponibili

**DEFINIZIONE 10.4.7. (INSIEMI SEMPLICEMENTE DECOMPONIBILI).**

Si dice **semplicemente decomponibile** o **s-decomponibile** un insieme  $D$  tale che:

$$D = \bigcup_{j=1}^k D_j$$

con  $D_j$  domini semplici rispetto a entrambi gli assi, tali che  $D_i^\circ \cap D_j^\circ = \emptyset$  se  $i \neq j$  e la cui frontiera sia unione finita e disgiunta di curve di Jordan regolari a tratti.

#### 10.5 DENSITÀ

**DEFINIZIONE 10.5.1. (DENSITÀ SUPERFICIALE).**

Definiamo **densità superficiale**  $\rho_0$  il rapporto

$$\rho_0 = \frac{\text{massa}(R)}{\text{area}(R)}$$

dove  $R$  è un rettangolo. Se tale rapporto non è costante,  $\rho_0$  risulta essere la *densità media* di



$R$  ed è opportuno definire

$$\rho(x, y) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(R(x, y))}{|R(x, y)|}$$

con  $\delta$  diagonale del rettangolo considerato e  $m$  la massa puntuale.

Nota  $\rho(x, y)$  vogliamo calcolare la massa totale contenuta in  $D$ . Osserviamo che, suddiviso  $D$  in tanti rettangolini  $R_{ij}$  si ha

$$m(R_{ij}) \equiv \rho(\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*) |R_{ij}|$$

con  $(\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*)$  un punto del rettangolino. Conoscendo la massa di ogni rettangolino possiamo sommare i contributi di tutti i rettangolini:

$$m(D) = \sum_{i,j} m(R_{ij}) = \sum_{i,j} \underbrace{\rho(\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*) |R_{ij}|}_{\sigma(P, (\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*), \rho)}.$$

Se  $\rho \in \mathcal{R}(D)$  si può passare dalla somma delle masse dei singoli rettangolini nel discreto a un integrale nel continuo:

$$m(D) = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sigma(P, (\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*), \rho) = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

È naturale estendere la definizione di densità ai volumi:

**DEFINIZIONE 10.5.2. (VOLUME).**

Sia  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  un dominio misurabile, ovvero tale che la sua funzione caratteristica

$$\mathbb{I}_V(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y, z) \in V \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è Riemann-integrabile. Definiamo **volume** di  $V$  l'integrale

$$|V| = \iiint_V dx dy dz = \iiint_V \mathbb{I}_V(x, y, z) dx dy dz.$$

**DEFINIZIONE 10.5.3. (DENSITÀ VOLUMICA).**

Sia  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  misurabile. Definiamo **densità volumica** il rapporto

$$\rho(x, y, z) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(V(x, y, z))}{|V(x, y, z)|}$$

con  $\delta$  diagonale del parallelepipedo considerato e  $m$  la massa.

Analogamente al caso bidimensionale, vale

$$m(V) = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

10.5.1 *Baricentro e momento d'inerzia*

Date  $N$  particelle collocate nei punti  $P_1, \dots, P_N$  di coordinate  $P_k = (\xi_k^*, \eta_k^*)$ , ciascuna di massa  $m_i > 0$  si osserva che le coordinate del baricentro  $G = (x_G, y_G)$  si ottengono con due *medie ponderate*.

**DEFINIZIONE 10.5.4. (BARICENTRO).**

Dato un insieme  $D$ , definiamo **baricentro** il punto  $G = (x_G, y_G)$  descritto da

$$x_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \xi_k^* m_k = \frac{1}{M} \sum_{i,j} \xi_{ij}^* \rho(\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*) |R_{ij}|$$

$$y_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \eta_k^* m_k = \frac{1}{M} \sum_{i,j} \eta_{ij}^* \rho(\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*) |R_{ij}|.$$

In entrambi i casi la seconda uguaglianza vale solo se  $|D| \neq 0$ . In questo caso, se  $\rho(x, y)$  è integrabile si può passare al continuo

$$x_G = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}$$

$$y_G = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}.$$

Considerando  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  misurabile, le coordinate del baricentro sono:

$$x_G = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz}{m(V)} \quad (10.5)$$

$$y_G = \frac{\iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz}{m(V)} \quad (10.6)$$

$$z_G = \frac{\iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz}{m(V)}. \quad (10.7)$$

con

$$m(V) = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

**DEFINIZIONE 10.5.5. (MOMENTO D'INERZIA).**

Dato un insieme  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , definiamo **momento d'inerzia** rispetto all'asse  $x$  (rispettivamente  $y$ ) la quantità

$$I_x = \sum_k y_k^2 m_k;$$

$$I_y = \sum_k x_k^2 m_k.$$

Essendo  $m_k = \rho(\xi_k^*, \eta_k^*) |R_k|$ , se  $|D| \neq 0$  e se  $\rho(x, y)$  è integrabile si può passare al continuo:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Considerando  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  misurabile, la formula diviene

$$\iiint_V \|r\|^2 \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

con  $\|r\|$  la distanza di  $D$  dall'asse rispetto a cui si sta valutando il momento d'inerzia.

**ESEMPIO.** Il momento d'inerzia di un corpo  $V$  in  $\mathbb{R}^3$  rispetto all'asse  $z$  è

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

**OSSERVAZIONE.** Il **baricentro** si può definire anche come il *punto rispetto a cui il momento d'inerzia di una superficie è nullo*.

## 10.6 CAMBIO DI VARIABILI

Come per l'integrazione di funzioni in una variabile spesso può essere utile operare un cambio di variabili anche per calcolare un integrale multiplo. In questa sezione ci poniamo quindi l'obiettivo di determinare in maniera euristica – siccome il risultato che otterremo è difficile da dimostrare formalmente – una formula analoga a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \phi'(t) dt,$$

ovvero la pratica uguaglianza

$$dx = \phi'(t) dt.$$

**ESEMPIO (CAMBIAMENTO DI VARIABILE TRAMITE UN'APPLICAZIONE LINEARE).**

Sia  $T$  un'applicazione lineare e  $A$  la matrice ad essa associata:

$$T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che  $T$  trasla, ruota e/o varia la lunghezza del vettore ma non lo deforma in una curva; l'immagine tramite  $T$  di un rettangolo è sempre un parallelogramma. Ci interessa studiare come varia l'area compresa tra due vettori qualsiasi per capire come modificare l'uguaglianza

$$\iint_{T(S)} f(x, y) dx dy = \iint_S f \circ T(u, v) [???] du dv.$$

Consideriamo quindi i vettori  $\vec{i}, \vec{j}$  della base canonica di  $\mathbb{R}^2$  che sono quindi anche i lati del quadrato  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  di area 1:

$$T(\vec{i}) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}; \quad T(\vec{j}) = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

L'area  $|T(Q)|$  compresa tra i vettori  $T(\vec{j}), T(\vec{i})$  è

$$|T(Q)| = \|T(\vec{i})\| \|T(\vec{j})\| |\sin \alpha| = \left\| \widetilde{T(\vec{i})} \wedge \widetilde{T(\vec{j})} \right\|,$$

con  $\alpha$  l'angolo compreso tra i due vettori e  $\widetilde{T(\vec{i})}$ ,  $\widetilde{T(\vec{j})}$  l'estensione di  $T(\vec{i})$ ,  $T(\vec{j})$  a  $\mathbb{R}^3$ . Utilizziamo la formula del determinante formale per calcolare il prodotto vettoriale:

$$\left\| \widetilde{T(\vec{i})} \wedge \widetilde{T(\vec{j})} \right\| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{vmatrix} = \left\| \vec{k} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \right\| = |\det A|.$$

Quindi

$$|T(Q)| = |\det A| |Q|$$

e il fattore moltiplicativo ??? che cercavamo è  $|\det A|$ .

In effetti vale il seguente:

**TEOREMA 10.6.I. (CAMBIAMENTO DI VARIABILE PER INTEGRALI DOPPI).**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto e sia  $T : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T \in \mathcal{C}^1(A; \mathbb{R}^2)$ . Sia  $S \subseteq A$  misurabile, Saperto o chiuso.

Supponiamo che  $T|_S : S \longrightarrow T(S)$  sia:

- biunivoca;
- $0 < |\det(J_T)| < +\infty$  su  $S$ .

Allora per ogni funzione integrabile  $f(x, y)$  su  $T(S)$  si ha che  $f \circ T$  è integrabile su  $S$  e

$$\iint_{T(S)} f(x, y) dx dy = \iint_S f \circ T(u, v) |\det(J_T)| du dv \quad \square$$

**COROLLARIO 10.6.I. (AREA DI UN INSIEME MISURABILE DEFORMATO).**

Se  $D$  è un insieme misurabile ed esiste  $T$  biunivoca tale che  $0 < |\det(J_T)| < +\infty$  su  $D$ , posto  $S = T^{-1}(D)$  allora

$$|T(S)| = |D| = |\det(J_T)| |S|. \quad \square$$

**OSSERVAZIONI.**

- Data una funzione  $T$  come nel teorema 10.6.I, se  $A$  è la matrice associata a  $T$  il determinante di  $A$  si può interpretare come una densità superficiale  $\rho$  dell'area  $S$ .
- Se  $T$  non è lineare, dato un rettangolo  $S$  l'immagine  $T(S)$  generalmente non è nemmeno un parallelogramma.

**ESEMPIO (COORDINATE POLARI).**

Consideriamo ora la funzione  $T$  legata al passaggio in coordinate polari:

$$T \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix} \quad r \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi].$$

Un rettangolo  $|R| = (b - a)(\beta - \alpha)$  diviene, attraverso la funzione  $T$ , una porzione di corona circolare<sup>a</sup> di area

$$|T(R)| = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(\beta - \alpha).$$

Definiti  $\Delta r := b - a$ ,  $\Delta \theta := \beta - \alpha$  e  $r_0 = a$ , studiamo il

$$\lim_{(\Delta r, \Delta \theta) \rightarrow (0,0)} \frac{|T(R)|}{|R|} = \lim_{(\Delta r, \Delta \theta) \rightarrow (0,0)} \frac{r_0 + \Delta r + r_0}{2} \frac{\Delta r \Delta \theta}{\Delta r \Delta \theta} = \lim_{(\Delta r, \Delta \theta) \rightarrow (0,0)} r_0 + \frac{\Delta r}{2} = r_0,$$

che è uguale al

$$|\det(J_T)| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

come ci aspettavamo.

<sup>a</sup>La corona circolare ha area  $\pi(b^2 - a^2)$ : tale valore si ottiene con la proporzione  $2\pi : (\beta - \alpha) = \pi(b^2 - a^2) : x$ .

**OSSERVAZIONE.** Nel caso delle coordinate polari l'applicazione  $T$  non è biettiva, come si può vedere nel caso  $\theta = 2\pi = 0$ , e  $|\det(J_T(0, 0))| = 0$ , quindi non potremmo applicare il teorema sul cambio di variabili. Ciò nonostante, sia  $(0, 0)$  sia le rette  $\theta = 0$  e  $\theta = 2\pi$  hanno misura nulla e quindi non influiscono sul calcolo dell'integrale.

## 10.7 INTEGRALI DOPPI IMPROPRI

### 10.7.1 Integrali di funzioni illimitate

**ESERCIZIO.** Sia  $D$  un disco di raggio  $a > 0$  e  $d \neq 0$  un parametro. Calcolare

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} dx dy.$$

**SOLUZIONE.** Calcoliamo l'integrale passando alle coordinate polari:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} dx dy &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{r^2 + d^2}} dr d\theta \\ &= \int_0^a \frac{r}{\sqrt{r^2 + d^2}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^a \frac{r}{\sqrt{r^2 + d^2}} dr \\ &= \sqrt{r^2 + d^2} \Big|_0^a = 2\pi(\sqrt{a^2 + d^2} - d). \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE.** Se  $d = 0$ , la funzione che abbiamo integrato coincide con

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{d(x, y)},$$

dove  $d(x, y)$  è la funzione distanza, e tale funzione  $\tilde{f}$  non è definita in 0.

Cosa succede se proviamo a integrare  $\tilde{f}(x, y)$ ?

**ESERCIZIO.** Sia  $D$  un disco di raggio  $a > 0$  e  $D_\varepsilon$  un disco di raggio  $\varepsilon > 0$ . Calcolare

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D \setminus D_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

**SOLUZIONE.** Avvalendoci del risultato dell'esercizio precedente, concludiamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D \setminus D_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi(a - \varepsilon) = 2\pi a.$$

**ESERCIZIO.** Sia  $D$  un disco di raggio  $a > 0$  e  $D_\varepsilon$  un disco di raggio  $\varepsilon > 0$ . Studiare al variare di  $\alpha$  l'esistenza

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D \setminus D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy.$$

e, in caso affermativo, calcolarne il valore.

**SOLUZIONE.** Calcoliamo l'integrale passando alle coordinate polari:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^a \frac{1}{r^\alpha} r dr \int_0^{2\pi} d\theta &= 2\pi \int_\varepsilon^a \frac{1}{r^{\alpha-1}} dr \\ &= \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi}{2-\alpha} (a^{2-\alpha} - \varepsilon^{2-\alpha}) & \text{se } \alpha \neq 2; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi(\log a - \log \varepsilon) & \text{se } \alpha = 2; \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} a^{2-\alpha} & \text{se } \alpha < 2; \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi la funzione data è integrabile se e solo se  $\alpha < 2$ .

**OSSERVAZIONE.** Nel corso di ANALISI MATEMATICA 1 abbiamo osservato che la funzione

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx$$

è integrabile se e solo se  $\alpha < 1$ .

**PROPOSIZIONE 10.7.1. (INTEGRABILITÀ DI  $d^\alpha$ ).**

In dimensione  $n$ , la funzione

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{d^\alpha(x_1, \dots, x_n)}$$

è integrabile in un intorno dell'origine se e solo se  $\alpha < n$ . □

**PROPOSIZIONE 10.7.2.**

Sia  $D_a$  il disco di raggio  $a > 0$  centrato nell'origine. Si ha che:

- in  $\mathbb{R}$ ,  $|D_a| = |[-a, a]| = 2a$ ;
- in  $\mathbb{R}^2$ ,  $|D_a^2| = \pi a^2$ ;
- in  $\mathbb{R}^3$ ,  $|D_a^3| = \frac{4}{3}\pi a^3$ ;
- in  $\mathbb{R}^n$ ,  $|D_a^n| \sim a^n$ . □

## 10.7.2 Integrali su domini illimitati

**DEFINIZIONE 10.7.1. (INTEGRALE IMPROPRIO).**

Data una funzione integrabile  $f(x, y)$ , definiamo l'**integrale improprio** su un dominio  $D$  illimitato come

$$\iint_D f(x, y) dx dy := \lim_{r \rightarrow +\infty} \iint_{D \cap D_r} f(x, y) dx dy$$

dove  $D_r$  il disco di raggio  $r$  centrato nell'origine.

**ESERCIZIO (INTEGRALE DI GAUSS).**

Studiamo l'integrale della funzione

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Per prima cosa, osserviamo che la funzione è ben definita in 0 ed è sicuramente integrabile per  $x \rightarrow +\infty$  per confronto poiché vale la maggiorazione

$$e^{-(x^2+y^2)} < \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}},$$

con  $\alpha$  grande a piacere. Detto  $D_r = [-r, r] \times [-r, r]$  calcoliamo

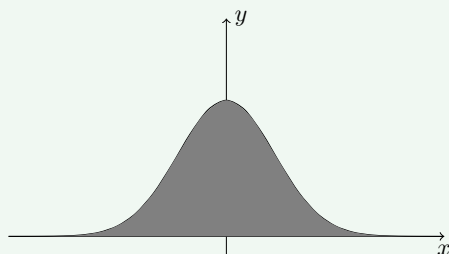
$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \int_{-r}^r e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-x^2} dx \int_{-r}^r e^{-y^2} dy \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \int_{-r}^r e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Non siamo in grado di determinare direttamente una primitiva della funzione che abbiamo ottenuto, ma la particolare espressione della funzione integranda ci induce ad utilizzare le coordinate polari:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \lim_{R \rightarrow +\infty} 2\pi \frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_0^R = \pi.$$

Forti di questo risultato, concludiamo anche che

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \int_{-r}^r e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \implies \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$



## 10.8 CALCOLO DELL'AREA E INTEGRALE DI SUPERFICIE

Consideriamo una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  parametrizzata da

$$r : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r_1(u, v) \\ r_2(u, v) \\ r_3(u, v) \end{pmatrix}$$

e sia  $D$  una superficie regolare, ovvero tale che  $J_r$  abbia rango massimo in  $D$ . Il vettore  $r_u \wedge r_v$  è normale al piano tangente di  $\Sigma$  nel generico punto  $P = (u_0, v_0) \in \Sigma$ .

**DEFINIZIONE 10.8.1. (AREA DI UNA SUPERFICIE).**

Si definisce **area della superficie**  $(\Sigma, r)$  la quantità

$$\text{area}(\Sigma) := \iint_D \|r_u \wedge r_v\| \, du \, dv.$$

**OSSERVAZIONE.** La definizione ha senso grazie al legame tra prodotto vettoriale e area compresa tra i vettori ed è invariante per riparametrizzazione.

**PROPOSIZIONE 10.8.1. (AREA DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE).**

Nel caso del grafico di una funzione  $f$  si ha che

$$\text{area}(\Gamma_f) = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} \, dx \, dy.$$

**DEFINIZIONE 10.8.2. (INTEGRALE DI SUPERFICIE).**

Sia  $\Sigma$  una superficie regolare parametrizzata da  $r : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  e sia  $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Si definisce **integrale di superficie di  $f$  su  $\Sigma$**  la quantità

$$\int_{\Sigma} f \, d\sigma = \iint_D f(r(u, v)) \|r_u \wedge r_v\| \, du \, dv.$$

**OSSERVAZIONE.** Se  $f \equiv 1$  costantemente otteniamo l'area di  $\Sigma$ .

**PROPOSIZIONE (INVARIANZA PER RIPARAMETRIZZAZIONE DEGLI INTEGRALI DI SUPERFICIE).**

Sia  $\phi : D' \longrightarrow D$  una funzione biunivoca tale che  $\phi \in C^1(D')$  e  $|\det(J_{\phi})| > 0$ . Posto  $\tilde{r}(s, t) = r \circ \phi(u, v)$ , si ha che

$$\iint_{D'} f(\tilde{r}(s, t)) \|r_s \wedge r_t\| \, ds \, dt = \iint_D f(r(u, v)) \|r_u \wedge r_v\| \, du \, dv.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $r(u, v)$  e  $\tilde{r}(s, t) = r \circ \phi = r(u(s, t), v(s, t))$  due funzioni che parametrizzano la stessa superficie. Si ha

$$\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t = (r_u u_s + r_v v_s) \wedge (r_u u_t + r_v v_t)$$



$$\begin{aligned}
&= u_s u_t r_u \wedge r_u + u_s v_t r_u \wedge r_v + v_s u_t r_v \wedge r_u + v_s v_t r_v \wedge r_v \\
&= (u_s v_t - v_s u_t)(r_u \wedge r_v).
\end{aligned}$$

La seconda uguaglianza si ottiene distribuendo il prodotto vettoriale e riordinando i termini, la terza dalle proprietà del prodotto vettoriale. Calcolandone la norma, otteniamo

$$\|\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t\| = \|r_u \wedge r_v\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right|.$$

da cui possiamo ricavare

$$\|\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t\| ds dt = \|r_u \wedge r_v\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| ds dt = \|r_u \wedge r_v\| du dv;$$

che implica

$$\begin{aligned}
\iint_{D'} f(\tilde{r}(s, t)) \|\tilde{r}_s \wedge \tilde{r}_t\| ds dt &= \iint_{D'} f(r \circ \phi)(s, t) \|r_u(\phi(s, t)) \wedge r_v(\phi(s, t))\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| ds dt \\
&= \iint_D f(r(u, v)) \|r_u \wedge r_v\| du dv.
\end{aligned}$$

□

## 10.9 FORMULA DI GAUSS-GREEN

### DEFINIZIONE 10.9.I. (CURVA POSITIVAMENTE ORIENTATA).

Sia  $D$  un dominio misurabile e limitato di  $\mathbb{R}^2$  la cui frontiera sia una curva di Jordan regolare a tratti. La **frontiera o curva positivamente orientata**  $\partial^+ D$  è la frontiera di  $D$  percorsa lasciando  $D^\circ$  alla propria sinistra.

### LEMMA 10.9.I. (INTEGRALI DI DERIVATE PARZIALI IN UN DOMINIO CON FRONTIERA DI JORDAN).

Sia  $D$  un dominio limitato e semplice di  $\mathbb{R}^2$  rispetto a uno dei due assi la cui frontiera sia una curva di Jordan regolare a tratti e sia

$$F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} \quad P, Q \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$$

un campo vettoriale di componenti  $P$  e  $Q$ . Allora:

- Se  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$  allora

$$\iint_D P_y(x, y) dx dy = - \int_{\partial^+ D} P dx = - \int_{\partial^+ D} (P, 0) \cdot ds$$

$$\text{dove } P_y := \frac{\partial P}{\partial y}.$$

- Se  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$  allora

$$\iint_D Q_x(x, y) dx dy = \int_{\partial^+ D} Q dy = \int_{\partial^+ D} (0, Q) \cdot ds$$

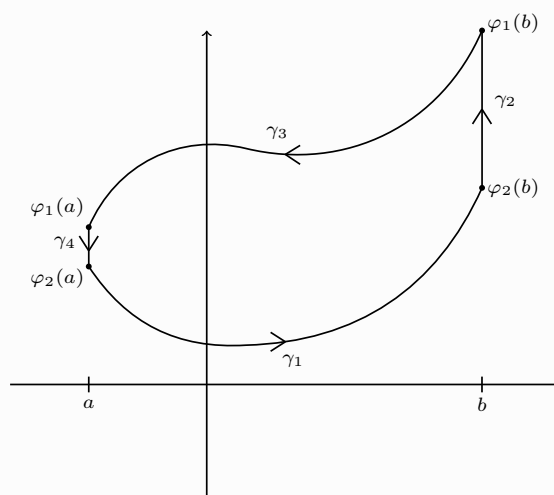
$$\text{dove } Q_x := \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo la prima affermazione, in quanto la seconda è analoga.

$$\iint_D P_y(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P_y(x, y) dy = \int_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))] dx .$$

Parametrizziamo ora la curva  $\partial^+ D$ :

$$\begin{aligned} (\gamma_1, r_1) : r_1(t) &= (t, \varphi_1(t)) \quad t \in [a, b]; \\ (\gamma_2, r_2) : r_2(t) &= (b, t) \quad t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]; \\ (-\gamma_3, r_3) : r_3(t) &= (t, \varphi_2(t)) \quad t \in [a, b]; \\ (-\gamma_4, r_4) : r_4(t) &= (a, t) \quad t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]. \end{aligned}$$



Osserviamo quindi che

$$\int_{\partial^+ D} P dx = \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_2} P dx + \int_{-\gamma_3} P dx + \int_{-\gamma_4} P dx.$$

Detta  $\omega$  la forma associata a  $F_p = P\vec{i} + 0\vec{j}$  e usando la formula

$$\int_{\gamma_i} F dx = \langle F(r(t)), r'(t) \rangle dt$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega &= \int_a^b \langle [P(t, \varphi_1(t)), 0], [1, \varphi_1'(t)] \rangle dt = \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt; \\ \int_{\gamma_2} \omega &= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} \langle (P(b, t), 0), (0, 1) \rangle dt = 0; \\ \int_{-\gamma_3} \omega &= - \int_a^b \langle [P(t, \varphi_2(t)), 0], (1, \varphi_2'(t)) \rangle dt = - \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt; \\ \int_{-\gamma_4} \omega &= - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} \langle [P(a, t), 0], (0, 1) \rangle dt = 0. \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$-\int_{\partial^+ D} \omega = -\int_{\partial^+ D} P dx = \int_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))] dx = \iint_D P_y(x, y) dx dy. \quad \square$$

Un'importantissima conseguenza del lemma precedente è il:

**TEOREMA 10.9.1. (DI GAUSS-GREEN).**

Sia  $D$  un dominio limitato e semplice di  $\mathbb{R}^2$  rispetto a entrambi gli assi. Sia  $F = P\vec{i} + Q\vec{j}$  con  $P, Q \in C^1(\bar{D})$ .

Allora:

$$\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial^+ D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\partial^+ D} F \cdot ds. \quad \square$$

**OSSERVAZIONE.** Il teorema di Gauss-Green lega due oggetti di dimensione diversa,

$$\underbrace{\iint_D (Q_x - P_y) dx dy}_{\text{volume, dim 2}} = \underbrace{\int_{\partial^+ D} F \cdot ds}_{\text{area, dim 1}}$$

in maniera simile al teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\underbrace{f(b) - f(a)}_{\text{dim 0}} = \underbrace{\int_a^b f'(t) dt}_{\text{dim 1}}$$

**OSSERVAZIONE.** Il teorema vale su una classe più ampia di volumi, detti **domini ammissibili**. Una famiglia di insiemi che fanno parte di questa classe è quella dei domini  $s$ -decomponibili  $D$ : detti  $D_j$  i domini tali  $D = \bigcup_{j=1}^k D_j$ , le curve  $\partial^+ D_j$  interne a  $D$  si elidono se si applica il teorema di Gauss-Green, e vale

$$\int_{\partial^+ D} F \cdot ds = \sum_{j=1}^k \int_{\partial^+ D_j} F \cdot ds \implies \iint_D Q_x - P_y dx dy = \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} Q_x - P_y dx dy.$$

### 10.9.1 Calcolo area con Gauss-Green

Possiamo applicare la *formula di Gauss-Green* per calcolare l'area di un insieme  $D \subset \mathbb{R}^2$  delimitato da una curva  $(\gamma, r)$ . Prima di tutto, ricordiamo che

$$|D| = \iint_D dx dy.$$

Ci basta trovare un campo vettoriale  $F = P\vec{i} + Q\vec{j}$  tale che  $Q_x - P_y \equiv 1$  in tutto  $D$  per poter usare il *teorema di Gauss-Green*. Di campi del genere ne esistono infiniti; i più comodi sono solitamente

$$\begin{aligned} F_0 &= x dy; \\ F_1 &= -y dx; \\ F_2 &= \frac{-1}{2} y dx + \frac{1}{2} x dy. \end{aligned}$$

**ESEMPIO.** Calcoliamo l'area della regione piana tra gli assi cartesiani e la curva  $(\gamma, r)$  di equazione

$$r(\theta) = \left( \begin{array}{c} \sin^3 \theta \\ \cos^2 \theta + \frac{\pi}{2} - \theta \end{array} \right), \quad \theta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$$

, utilizzando il *teorema di Gauss-Green*. Il bordo percorso positivamente è pari a

$$\partial^+ D = \gamma_1 \cup -\gamma \cup \gamma_2,$$

con  $\gamma_1$  la curva parametrizzata da  $r_1(t) = (t, 0)$ ,  $t \in [0, 1]$  e  $\gamma_2$  parametrizzata da  $r_2(t) = (0, \frac{\pi}{2} + 1 - t)$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2} + 1]$ . Allora

$$|D| = \iint_D dx dy = \int_{\partial^+ D} x dy = \int_{\partial^+ D} (0, x) dy.$$

Separando la curva  $\partial^+ D$  nelle sue componenti, si ha

$$\int_{\partial^+ D} x dy = \int_{\gamma_1} x dy - \int_{\gamma} x dy + \int_{\gamma_2} x dy = \int_0^1 \langle (0, t), (1, 0) \rangle dt - \int_{\gamma} x dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}+1} 0 dt = - \int_{\gamma} x dy.$$

Non ci resta che calcolare questo integrale curvilineo:

$$- \int_{\gamma} x dy.$$

Osserviamo che

$$r'(\theta) = \left( \begin{array}{c} 3 \sin^2 \theta \cos \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta - 1 \end{array} \right),$$

quindi

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma} x dy &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin^4 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \\ &= -\frac{2}{5} \sin^5 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= -\frac{2}{5} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= -\frac{2}{5} + \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{2}{5} - 1 + \frac{1}{3} = -\frac{16}{15}. \end{aligned}$$

da cui

$$|D| = \frac{16}{15}.$$

### 10.9.2 Teoremi di Stokes e della divergenza nel piano

#### **TEOREMA 10.9.2. (DEL ROTORE O DI STOKES E DELLA DIVERGENZA NEL PIANO).**

Sia  $D$  un dominio ammissibile e sia  $\partial^+ D$  la sua frontiera orientata positivamente. Allora, dato un

campo  $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F \in C^1(D)$ ,  $F(x, y) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j} + 0\vec{k}$ , si ha che

$$\iint_D \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{k} \rangle dx dy = \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle ds; \quad \iint_D \text{div } \vec{F} dx dy = \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, \vec{N}_e \rangle ds;$$

con  $\vec{T}$  il versore tangente a  $\partial^+ D$  con verso a essa concorde e  $\vec{N}_e$  il versore normale a  $\partial^+ D$  orientato verso l'esterno.

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare la prima si utilizza la *formula di Gauss-Green* applicate al campo  $F$ :

$$\begin{aligned} \iint_D \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{k} \rangle dx dy &= \iint_D \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\partial^+ D} f(x, y) dx + g(x, y) dy \\ &= \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}(r(s)), r'(s) \rangle ds \\ &= \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle ds. \end{aligned}$$

Per la seconda si considera il campo  $G(x, y) = g(x, y)\vec{i} - f(x, y)\vec{j} + 0\vec{k}$  ortogonale a  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \iint_D \text{div } \vec{F} dx dy &= \iint_D \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\partial^+ D} g(x, y) dx - f(x, y) dy \\ &= \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}(r(s)), r'(s) \rangle ds \\ &= \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, \vec{N}_e \rangle ds. \quad \square \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE.** Se il campo  $\vec{F}$  è irrotazionale l'integrale lungo la sua frontiera è nullo.

**ESEMPIO (FORMA ARGOMENTO).**

Consideriamo ancora una volta la *forma argomento*

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \quad \text{Dom}(\omega) = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0).$$

Supponiamo di voler calcolare l'integrale curvilineo del campo  $\vec{F}$  associato alla forma lungo un dominio ammissibile  $D$  qualsiasi. Dalle considerazioni precedenti sappiamo che la forma argomento è chiusa, quindi  $\vec{F}$  è irrotazionale, ma *non* possiamo applicare il teorema di Stokes perché  $\vec{F} \notin C^1(D)$ : restringiamo quindi  $D$  a  $D \setminus D_\epsilon$  sottraendo a  $D$  un disco di raggio  $\epsilon$ , anch'esso centrato nell'origine – che è il punto singolare. Otteniamo quindi un dominio ammissibile in cui possiamo applicare i risultati che appena visti, quindi deve essere

$$0 = \iint_{D \setminus D_\epsilon} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{k} \rangle dx dy = \int_{\partial^+ D} \omega - \int_{\partial^+ D_\epsilon} \omega.$$

Abbiamo dunque

$$\int_{\partial^+ D_\varepsilon} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon(\sin^2 t + \cos^2 t)}{\varepsilon(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 2\pi \implies \int_{\partial^+ D} \omega = 2\pi,$$

indipendentemente dal cammino.

Concludiamo, omettendone la dimostrazione, con il

**TEOREMA 10.9.3. (TEOREMA DELLA DIVERGENZA NELLO SPAZIO).**

Sia  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  un dominio la cui frontiera è una superficie regolare, chiusa e orientata nel verso dato da  $N_{ext}$ , il versore normale esterno alla superficie, e sia  $F : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F \in \mathcal{C}^1(V)$ . Allora

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz = \iint_\Sigma \langle \vec{F}, N_{ext} \rangle \, d\sigma. \quad \square$$

10.10 ALCUNI CENNI DI TEORIA DEGLI INTEGRALI MULTIPLI GENERALIZZATI

La teoria degli integrali doppi può essere estesa in  $\mathbb{R}^n$ ; si hanno le seguenti corrispondenze:

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^n$
Rettangolo $R$	Prodotto di n-intervalli $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n$
Area $ R  = (b-a)(d-c)$	Volume n-dimensionale $ Q  = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$
Partizioni $P_1 \times P_2$	Partizioni $P_1 \times \dots \times P_n$ $P_i = \{a_i = x_{1,i} < \dots < x_{k,i} = b_i\}$
Somme inferiori	$s(\mathcal{P}, f) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} m_{j_1 \dots j_n}  Q_{j_1 \dots j_n} $
Somme superiori	$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} M_{j_1 \dots j_n}  Q_{j_1 \dots j_n} $
Somme di Riemann	$\sigma(\mathcal{P}, f) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} \mu_{j_1 \dots j_n}  Q_{j_1 \dots j_n} $

con

$$m_{j_1 \dots j_n} = \inf_{Q_{j_1 \dots j_n}} f \leq \mu_{j_1 \dots j_n} = f(x_{j_1 \dots j_n}^*) \leq \sup_{Q_{j_1 \dots j_n}} f = M_{j_1 \dots j_n}.$$

Rimangono invariati i concetti di:

- misura di Peano-Jordan;
- insiemi misurabili (come i grafici delle funzioni  $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ );
- insiemi di misura nulla;
- funzioni integrabili su regioni misurabili;
- integrabilità delle funzioni generalmente continue;
- integrazione su domini semplici:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}, g_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq g_2(x_1, \dots, x_{n-1})\};$$

in particolare, in  $\mathbb{R}^3$  si parla di *integrazione per fili e per strati*;

- formule di riduzione – su domini semplici cambiare l'ordine d'integrazione non influisce sul risultato.

## 10.11 † INTEGRAZIONE PER FILI E PER STRATI

Data  $f : V \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  integrabile secondo Riemann, l'ordine con cui si calcola effettivamente l'integrale

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

assume un significato geometrico preciso. Per osservare questo fatto, supponiamo che  $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  e integriamo lungo l'asse  $z$ :

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} dx \, dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz .$$

Questa formula è detta d'**integrazione per fili**.

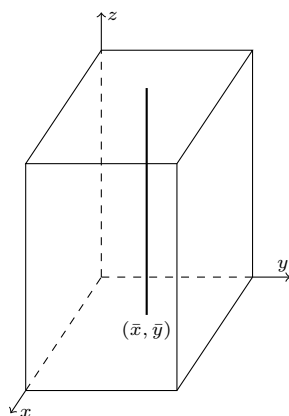


FIGURA 10.2 – In questo caso, integrando per fili si fissa  $\tilde{x}, \tilde{y}$  e si integra lungo il filo verticale.

L'altro modo di calcolare gli integrali tripli è per mezzo della formula d'**integrazione per strati**

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \iint_{[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} f(x, y, z) \, dy \, dz .$$

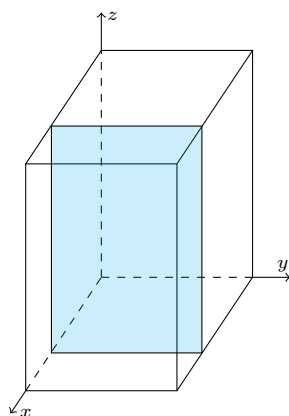


FIGURA 10.3 – In questo caso, integrando per strati si fissa  $x$  e si integra lungo lo "strato".

**OSSERVAZIONI.**

- Non sempre è possibile – od opportuno – integrare in entrambi i modi.
- Le formule ottenute integrando lungo fili o strati diversi da quelli presentati nell'esempio si dicono comunque d'integrazione per fili e per strati.

## 10.12 ‡ SOLIDI DI ROTAZIONE

**DEFINIZIONE 10.12.I. (SOLIDO DI ROTAZIONE).**

Un solido ottenuto ruotando una superficie intorno a un asse si dice **solido di rotazione**.

Osservando che i singoli punti del solido durante la rotazione descrivono una circonferenza, è naturale calcolare il *volume* col metodo dell'integrazione per strati, fissando l'asse di rotazione: otteniamo così dei cerchi, il cui raggio è una funzione della coordinata lungo l'asse di rotazione – nell'esempio rappresentato in figura è  $r(z)$ . Di conseguenza, il volume risulta

$$\text{Vol}(V) = \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^h A(z) \, dz = \int_0^h \pi \cdot r^2(z) \, dz.$$

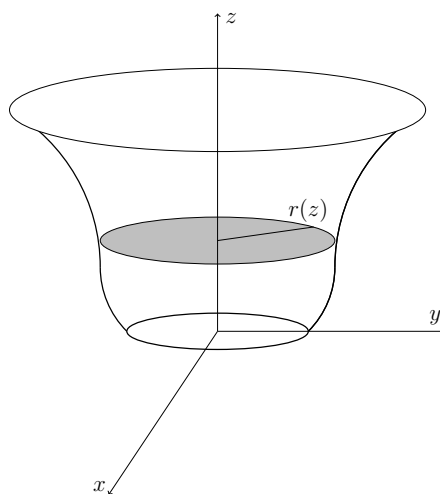


FIGURA 10.4 – Esempio di solido di rotazione.

Concludiamo citando l'utile

**TEOREMA 10.12.I. (DI PAPPO-GULDINO).**

Sia  $S$  un insieme limitato e misurabile contenuto nel piano  $x = 0$  e sia  $V$  il solido ottenuto facendo ruotare  $S$  attorno all'asse  $z$ . Allora

$$\text{Vol}(V) = 2\pi \text{Area}(S) y_B$$

con  $y_B$  coordinata  $y$  del baricentro di  $S$ .

□





# V

## APPENDICE



# APPENDICE

---

*“Probabilmente c’era un modo più intelligente di dirlo, ma ci siamo capiti.”*

BRUNO TOALDO, o qualunque altro matematico, probabilmente.

**ATTENZIONE!** Consigliamo *caldamente* di provare a svolgere gli esercizi prima di leggerne le soluzioni.

## A.1 ESERCIZI SU FORME DIFFERENZIALI

**ESERCIZIO (ESERCIZIO 1, PROVA SCRITTA DEL 17/06/2021).**

Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  tale che  $f(1) = 0$  e sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(f\left(\frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{x}\right) dy.$$

1. Determinare  $f$  in modo che  $\omega$  sia esatta nell’insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

2. Sia  $\gamma$  il grafico della funzione  $\phi(x) = \sin(2x) + 3 \cos(4x)$ ,  $x \in [\pi, 2\pi]$ . Stabilire se la curva  $\gamma$  è semplice, regolare, chiusa.
3. Per la scelta di  $f$  al punto (a) calcolare

$$\int_{\gamma} \omega.$$

**SOLUZIONE.**

1. Poiché  $\omega \in C^1(\Omega)$  con  $\Omega$  stellato sappiamo se  $\omega$  è chiusa allora è anche esatta.

Imponiamo che  $\omega$  sia chiusa e deduciamone  $f$ :

$$\begin{aligned}\partial_x \left( f \left( \frac{x}{y^2} \right) + \frac{1}{x} \right) &= \partial_y \left( -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \right) \\ \frac{1}{y^2} f' \left( \frac{x}{y^2} \right) - \frac{1}{x^2} &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \\ f' \left( \frac{x}{y^2} \right) &= -1.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi che  $f(u) = -u + c$ : imponendo il passaggio per  $(1, 0)$  ricaviamo che  $f(u) = -u + 1$ .

- Utilizziamo la parametrizzazione  $\alpha(u) = (u, \sin(2u) + 3 \cos(4u))$ , dove  $u \in [\pi, 2\pi]$ . Sapendo che  $\alpha$  è  $\mathcal{C}^1$ , dalla prima componente si osserva sia l'iniettività sia che  $\alpha'(u) \neq (0, 0)$  per ogni  $u \in [\pi, 2\pi]$ . Si noti come  $\gamma$  non sia chiusa poiché  $\alpha(\pi) \neq \alpha(2\pi)$ .
- Utilizziamo il *metodo delle integrazioni parziali* per determinare il potenziale di  $\omega$ :

$$\begin{cases} \partial_x \eta = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \\ \partial_y \eta = -\frac{x}{y^2} + 1 + \frac{1}{x} \end{cases}$$

Da ciò ricaviamo

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + g(y) = \frac{x}{y} + y + \frac{y}{x} + h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(y) = y + c' \\ h(x) = c'' \end{cases},$$

dunque il nostro potenziale sarà

$$\eta(x, y) = \frac{x}{y} + y + \frac{y}{x} + c$$

e l'integrale richiesto è pari a

$$\int_{\gamma} \omega = \eta(\alpha(\pi)) - \eta(\alpha(2\pi)).$$

## A.2 ESERCIZI SULL'APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI DINI

### ESERCIZIO (ESERCIZIO 6.A, FOGLIO 6 DEL TUTORATO, A. A. 22-23).

Sia

$$f(x, y, z) = 2x^3 + y^4 + z^3 - xz - 2x$$

e  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ . Si consideri l'equazione  $f(x, y, z) = 0$ .

- Si verifichi che essa definisce implicitamente una unica funzione  $z = \Phi(x, y)$  definita in un intorno di  $(x_0, y_0)$  e tale che  $\Phi(x_0, y_0) = z_0$ ;
- Si calcoli  $\nabla \Phi(x_0, y_0)$ .

### SOLUZIONE.

- La funzione  $f \in \mathcal{C}^1$  e soddisfa
  - $f(1, 0, 0) = 0$
  - $\partial_z f(1, 0, 0) = 3z^2 - x = -1 \neq 0$

Per il *teorema di Dini* esiste una funzione implicita  $\Phi(x, y)$  definita in un intorno di  $(1, 0)$  tale che  $z = \Phi(x, y)$  e, in particolare,  $\Phi(1, 0) = 0$ .

2. Ricordiamo che il gradiente è definito come

$$\nabla \Phi(x_0, y_0) = (\partial_x \Phi(x_0, y_0), \partial_y \Phi(x_0, y_0)).$$

Osserviamo che

$$\partial_x f(1, 0, 0) = 6x^2 - z - 2 = 4\partial_y(1, 0, 0) = 4y^3 = 0\partial_z(1, 0, 0) = 3z^2 - x = -1$$

pertanto

$$\begin{aligned}\partial_x \Phi(x_0, y_0) &= -\frac{\partial_x(x_0, y_0, \Phi(x_0, y_0))}{\partial_z(x_0, y_0, \Phi(x_0, y_0))} = 4 \\ \partial_y \Phi(x_0, y_0) &= -\frac{\partial_y(x_0, y_0, \Phi(x_0, y_0))}{\partial_z(x_0, y_0, \Phi(x_0, y_0))} = 0\end{aligned}$$

da cui segue che  $\nabla \Phi(x_0, y_0) = (4, 0)$ .

### A.3 ESERCIZI SU INTEGRALI DOPPI E TRIPLI

#### ESERCIZIO (ESERCIZIO 2, PROVA SCRITTA DEL 14/01/2020 - VERSIONE A).

Si calcoli l'integrale

$$\iint_D xy \, dx \, dy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, |x - 1| \leq y + 1\}.$$

**SOLUZIONE.** Il dominio  $D$  è dato dall'intersezione tra il disco chiuso di raggio 2 centrato nell'origine e la funzione valore assoluto traslata di un vettore  $(1, -1)$ . Per risolvere l'integrale suddividiamo  $D$  in  $D_1 \cup D_2 \cup D_3$  come nella figura seguente.

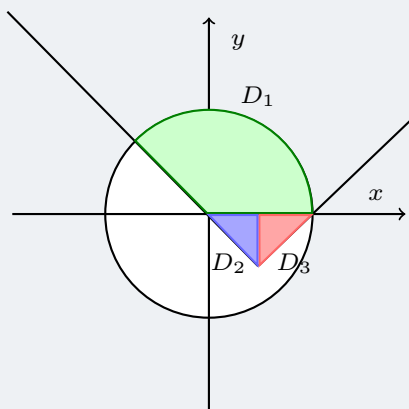


FIGURA A.1 – Il dominio  $D$  con le suddivisioni  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  evidenziate.

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, y \geq -x\};$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 0\};$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x - 2 \leq y \leq 0\}.$$

**Integrale su  $D_1$ .** Passiamo alle coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) & \rho \in (0, 2) \\ y = \rho \sin(\theta) & \theta \in [0, \frac{3}{4}\pi] \end{cases}$$

Nell'esempio a pag. 163 abbiamo già visto che  $|\det(J_T)| = \rho$ . Risolviamo quindi l'integrale

$$\int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta$$

effettuando la sostituzione  $t = \cos(\theta)$ , da cui  $d\theta = -\frac{dt}{\sin(\theta)}$ . Si ha

$$\int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\cos(0)}^{\cos(\frac{3}{4}\pi)} t \sin(\theta) \left(-\frac{dt}{\sin(\theta)}\right) = \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\cos(0)}^{\cos(\frac{3}{4}\pi)} -t dt = \left(\frac{\rho^4}{4}\right) \Big|_0^2 \left(-\frac{t^2}{2}\right) \Big|_1^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1.$$

**Integrale su  $D_2$ .** In questo caso non è necessaria alcuna sostituzione:

$$\int_0^1 x dx \int_{-x}^0 y dy = \int_0^1 \frac{x}{2} y^2 \Big|_{-x}^0 dx = -\int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = -\frac{x^4}{8} \Big|_0^1 = -\frac{1}{8}.$$

**Integrale su  $D_3$ .** Anche in questo caso procediamo direttamente al calcolo:

$$\int_1^2 x dx \int_{x-2}^0 y dy = \int_1^2 -\frac{x}{2} (x-2)^2 dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x^2\right) \Big|_1^2 = -\frac{5}{24}.$$

In conclusione,

$$\iint_D xy dx dy = 1 - \frac{1}{8} - \frac{5}{24} = \frac{2}{3}.$$

#### A.4 ESERCIZI SU EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

**ESERCIZIO (ESERCIZIO 2, PROVA SCRITTA DEL 29/06/2020).**

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y(1-y)}{1+t^2} \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

- (i) Motivare l'esistenza di un'unica soluzione definita su tutto  $\mathbb{R}$ .
- (ii) Dopo aver determinato tale soluzione, calcolarne i limiti agli estremi del dominio di definizione.
- (iii) Era possibile applicare il teorema dell'asintoto orizzontale a tale problema per arrivare alla conclusione del punto (ii)? Motivare la risposta.

**SOLUZIONE.**

- (i) Osserviamo che  $f(t, y)$  è ben definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$  ed è continua. Osserviamo che  $y = 0$  e  $y = 1$  sono soluzioni costanti; per il *teorema di esistenza e unicità* la soluzione con dato iniziale  $\frac{1}{2}$  si deve mantenere all'interno della striscia definita dalle due soluzioni costanti: la soluzione richiesta è quindi limitata e si può applicare il *teorema di esistenza globale*.
- (ii) Per determinare la soluzione prima esplicitiamo

$$\int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

e poi imponiamo il passaggio per il punto noto. Iniziamo risolvendo singolarmente i due integrali:

$$\int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{(1-y)} dy = \log|y| - \log|1-y| + k;$$

$$\int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(t) + q.$$

Utilizzando il dato iniziale, si ha che

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \arctan(0) + c \implies c = 0$$

e grazie ad alcuni passaggi algebrici otteniamo

$$y \frac{1}{1-y} = \exp(\arctan(t))$$

$$y = (1-y) \exp(\arctan(t))$$

$$y = \frac{\exp(\arctan(t))}{1 + \exp(\arctan(t))}.$$

Notiamo che il risultato ottenuto è ben definito, in quanto si ha che  $y \in (0, 1)$  e  $\exp(\arctan(t)) \geq 0$ . Resta solo da calcolarne i limiti agli estremi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\exp(\arctan(t))}{1 + \exp(\arctan(t))} = \frac{e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi/2}}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\exp(\arctan(t))}{1 + \exp(\arctan(t))} = \frac{e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi/2}} = \frac{1}{1 + e^{\pi/2}}.$$



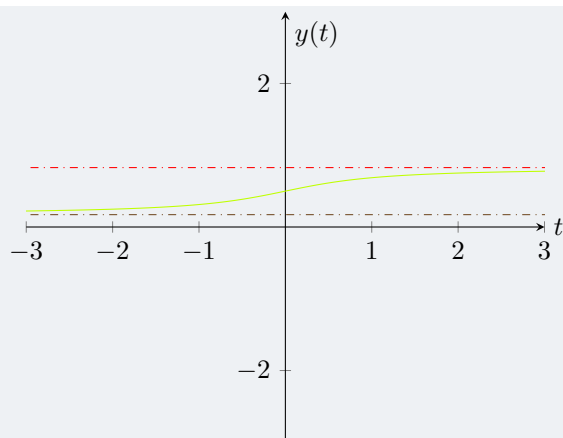


FIGURA A.2 – Le soluzioni costanti dell'equazione differenziale in questione e la soluzione del problema di Cauchy associato.

- (iii) Non avremmo potuto: sebbene sia facile osservare che l'unica soluzione costante è  $y = 1$  e questo, unito al fatto che la funzione è monotona crescente, ci garantisce l'esistenza di un asintoto per  $t \rightarrow +\infty$ , non avremmo potuto dire quale valore avrebbe assunto la funzione – il risultato del punto precedente è più forte.

**ESERCIZIO (ESERCIZIO 4, PROVA SCRITTA DEL 04/02/2020 - VERSIONE A).**

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t} + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}.$$

- (a) Motivare l'esistenza di un'unica soluzione locale del problema di Cauchy.  
 (b) Determinare l'intervallo massimale di definizione,  $I = (T_{min}, T_{max})$ , della soluzione del punto (a),  $\bar{y}$ . Motivare la risposta.  
 (c) Calcolare

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} \bar{y}$$

e studiare la concavità di  $\bar{y}$  su  $I$ .

- (d) Si definisca

$$z(t) = \frac{\bar{y}}{t}.$$

Determinare il problema di Cauchy soddisfatto da  $z$ , quindi risolverlo determinando l'espressione analitica di  $z$ .

- (e) Dedurre l'espressione di  $\bar{y}$  e tracciarne il grafico.

**SOLUZIONE.**

- (a) Verifichiamo le ipotesi del *teorema di esistenza e unicità locale* (teorema 9.4.1):  
 (i) La funzione  $f$  è continua in  $(0, +\infty)$ .  
 (ii) Dobbiamo verificare che  $f$  sia localmente lipschitziana in  $y$  in  $D$ , uniformemente rispetto a  $t$ . Per fare ciò osserviamo che basta verificarlo sugli intervalli

del tipo  $[2^{-n}, +\infty)$ : infatti, si ha che  $\cup_{n \in \mathbb{N}} [2^{-n}, +\infty) = (0, +\infty)$ , ma

$$\|t^{-1}(y_1 + 1 - y_2 - 1)\| = \|t^{-1}(y_1 - y_2)\| \leq 2^{-n}\|y_1 - y_2\|, \forall t \in [2^{-n}, +\infty).$$

Alternativamente, si poteva calcolare  $y''$  e osservare che è continua su  $I$ :

$$\left(\frac{y}{t} + 1\right)' = \frac{ty' - y}{t^2} = \frac{t\left(\frac{y}{t} + 1\right) - y}{t^2} = \frac{t}{t^2} = t^{-1}.$$

- (b) Siccome una funzione integrale *non* può ammettere discontinuità l'intervallo massimale di definizione sarà  $(0, +\infty)$ .
- (c) La derivata seconda è strettamente positiva su tutto  $I$ , quindi la derivata prima sarà monotona crescente e siccome  $y'(1) = \frac{1}{1} + 1 = 2$  si avrà che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{y} = \infty$$

Infatti, la monotonia della derivata implica l'esistenza del limite, il fatto che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y' \neq 0$$

impedisce di avere un asintoto orizzontale.

- (d) Derivando  $\frac{\bar{y}}{t}$  nello stesso modo in cui abbiamo ricavato  $y''$  otteniamo  $t^{-1}$  da cui

$$\begin{cases} z' = \frac{1}{t} \\ z(1) = 1 \end{cases}.$$

Risolviamo quindi  $\int dz = \int t^{-1} dt$  e otteniamo

$$z = \log(t) + c.$$

Imponendo che  $z(1) = 1$  si ha  $1 = 0 + c$ , da cui segue  $c = 1$  e quindi

$$z = \log(t) + 1.$$

- (e) L'espressione di  $\bar{y} = tz$  sarà

$$\bar{y} = t(\log(t) + 1).$$

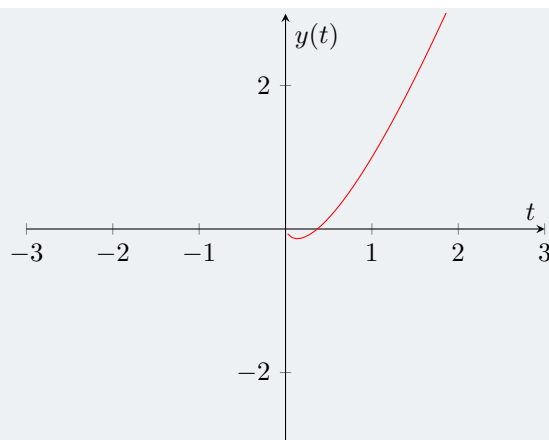


FIGURA A.3 – Grafico della soluzione  $\bar{y} = t(\log(t) + 1)$ .

**Si può ricavare direttamente l'espressione analitica di  $\bar{y}$ ?** Sì: per prima cosa osserviamo che per  $t \neq 0$  abbiamo un'equazione lineare di cui vogliamo determinare la soluzione passante per il punto  $(1, 1)$ . Siano

$$\begin{cases} a(x) = t^{-1} \\ b(x) = 1 \end{cases}$$

con  $a(x), b(x) \in C^0((0, +\infty))$  e  $1 \in (0, +\infty)$ , quindi abbiamo un'unica soluzione su  $I = (0, +\infty)$ : per determinarla usiamo la formula

$$y(x) = e^{A(x)} \left( \int b(x)e^{-A(x)} dx + C \right)$$

dove  $A(x) = \log(x)$  è una primitiva di  $a(x)$ . Un esercizio svolto simile è l'*Esercizio 3* della prova scritta del 15/01/18 - versione A.

**Un'altra possibile soluzione.** Osserviamo che l'equazione

$$y' = \frac{y}{t} + 1$$

è lineare non omogenea. Se  $0 \in J \subseteq \mathbb{R}$ , possiamo esprimere la soluzione  $y$  come somma della soluzione dell'equazione differenziale omogenea  $y^{om}$  più una soluzione particolare  $\bar{y}$ .

$$\begin{aligned} y &= y^{om} + \bar{y} \\ (y^{om})' &= \frac{y}{t} \Rightarrow y^{om} = ct. \end{aligned}$$

Cerchiamo  $\bar{y} = Ce^{-A(t)}$ :

$$\bar{y} = c(t)t \Rightarrow c't + c = \frac{ct}{t} + 1,$$

da cui ricaviamo  $c' = \frac{1}{t}$  e quindi  $c = \log\left(\frac{t}{t_0}\right)$  dove  $t_0$  è una costante arbitraria, che assorbe anche la  $c$  del precedente passaggio. In realtà per  $t_0 > 0$  la soluzione vale per  $t > 0$ , altrimenti per  $t_0 < 0$  vale per  $t < 0$ . Questa è la soluzione generale che è singolare in  $t = 0$ .

**ESEMPIO (ESERCIZIO 4, PROVA SCRITTA DEL 14/01/2020 - VERSIONE A).**

Si consideri l'equazione lineare del secondo ordine

$$y'' + 2y' + y = \frac{\log(x)}{e^x}.$$

1. In base ai risultati teorici studiati, stabilire l'intervallo massimale di definizione dei problemi di Cauchy ad essa associati.
2. Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione e stabilire se ammette soluzioni limitate.

**SOLUZIONE.**

1. Sia  $a = c = 1$ ,  $b = 2$  e

$$f(x) = \frac{\log(x)}{e^x}$$

sono  $C^\infty((0, +\infty))$  quindi l'intervallo massimale di definizione sarà  $I = (0, +\infty)$ .

2. Per la risoluzione di questo esercizio useremo il *metodo di variazione delle costanti* (proposizione 9.10.1). Cominciamo risolvendo l'equazione omogenea associata  $y'' + 2y' + y = 0$ . L'unico zero di  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$  è  $-1$ ; l'insieme delle soluzioni è quindi  $\{xe^{-x}, e^{-x}\}$ . Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} c_1' e^{-x} + x c_2' e^{-x} = 0 \\ -c_1' e^{-x} + c_2' e^{-x} - x c_2' e^{-x} = e^{-x} \log(x) \end{cases} \implies \begin{cases} c_1' + x c_2' = 0 \\ c_2' = \log(x) \end{cases}.$$

Integrando l'ultima equazione si ha

$$c_2 = x(\log(x) - 1) + k_2,$$

quindi

$$c_1 = \frac{x^2}{4}(1 - 2\log(x)) + k_1$$

e le soluzioni saranno

$$xe^{-x}(x(\log(x) - 1) + k_2) + e^{-x}\left(\frac{x^2}{4}(1 - 2\log(x)) + k_1\right)$$

con  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ . Le soluzioni sono tutte limitate.



# DEFINIZIONI E TEOREMI

---

## ELENCO DELLE DEFINIZIONI, DEGLI ASSIOMI E DEI PRINCIPI

### CAPITOLO 1:

DEF1.1.1. LIMITE PER FUNZIONI A VALORI SCALARI.	3
DEF1.1.2. CONTINUITÀ PER FUNZIONI A VALORI SCALARI.	3
DEF1.2.1. DERIVATA DIREZIONALE.	4
DEF1.2.2. DIFFERENZIABILITÀ.	4
DEF1.2.3. GRADIENTE.	4
DEF2.1.1. FUNZIONE VALORI VETTORIALI.	7
DEF2.1.2. LIMITE.	7
DEF2.1.3. CONTINUITÀ.	8
DEF2.3.1. APPLICAZIONE LINEARE.	10
DEF2.3.2. NORMA OPERATORIALE.	10
DEF2.4.1. FUNZIONE DIFFERENZIABILE, DIFFERENZIALE.	11
DEF2.7.1. FUNZIONE INTEGRABILE, INTEGRALE DI FUNZIONI VETTORIALE.	15
DEF2.8.1. CAMPO VETTORIALE.	16
DEF2.8.2. GRADIENTE.	16
DEF2.8.3. DIVERGENZA.	16
DEF2.8.4. ROTORE.	17
DEF2.8.5. LAPLACIANO.	17
DEF3.0.1. CURVA PARAMETRICA.	19
DEF3.1.1. TIPI DI CURVE.	20
DEF3.1.2. CURVE EQUIVALENTI.	21
DEF3.2.1. LUNGHEZZA.	22

DEF3.4.1. CURVA UNIONE.	26
DEF3.5.1. CURVA REGOLARE A TRATTI.	27
DEF3.8.1. INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE.	28
DEF3.8.2. MASSA DI UN FILO.	29
DEF4.1.1. 1-FORMA.	31
DEF4.2.1. INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE.	33
DEF4.3.1. CAMPO CONSERVATIVO.	34
DEF4.3.2. FORMA ESATTA.	34
DEF4.4.1. FORMA CHIUSA.	37
DEF4.4.2. CAMPO IRROTAZIONALE.	37
DEF4.4.3. DOMINIO STELLATI.	38
DEF4.4.4. CURVE OMOTOPE.	39
DEF4.4.5. SPAZIO SEMPLICEMENTE CONNESSO.	40
DEF4.4.6. CAMPO CENTRALE.	41
DEF5.1.1. LIMITE PER SUCCESSIONI DI NUMERI COMPLESSI.	47
DEF5.2.1. SUCCESSIONE DI FUNZIONI.	48
DEF5.2.2. CONVERGENZA PUNTUALE.	48
DEF5.2.3. CONVERGENZA UNIFORME.	48
DEF5.2.4. CONVERGENZA PER SUCCESSIONI A DUE VARIABILI.	51

- DEF5.2.5.** CONVERGENZA UNIFORME PER SUCCESSIONI A DUE VARIABILI. 51
- DEF5.3.1.** CONVERGENZA PUNTUALE. 56
- DEF5.3.2.** CONVERGENZA UNIFORME. 56
- DEF5.3.3.** CONVERGENZA ASSOLUTA. 57
- DEF5.3.4.** CONVERGENZA TOTALE. 58
- DEF5.4.1.** SERIE DI POTENZE. 62
- DEF5.4.2.** RAGGIO E CERCHIO DI CONVERGENZA. 63
- DEF5.4.3.** SERIE DERIVATA. 67
- DEF5.4.4.** FUNZIONE OLOMORFA. 68
- DEF5.4.5.** RELAZIONI DI CAUCHY-RIEMANN. 68
- DEF5.4.6.** SERIE DI TAYLOR. 69
- DEF5.4.7.** FUNZIONE ANALITICA. 70
- DEF6.1.1.** NORMA, SPAZIO NORMATO. 79
- DEF6.1.2.** NORMA- $p$ . 80
- DEF6.2.1.** NORMA LAGRAGIANA. 81
- DEF6.3.1.** DISTANZA, SPAZIO METRICO. 82
- DEF6.3.2.** PALLA. 82
- DEF6.3.3.** LIMITE. 83
- DEF6.3.4.** NORME E DISTANZE EQUIVALENTI. 83
- DEF6.3.5.** INSIEME APERTO, LIMITATO. 84
- DEF6.3.6.** INSIEME COMPATTO. 84
- DEF6.3.7.** CONTINUITÀ IN UN PUNTO. 84
- DEF6.3.8.** CONTINUITÀ IN UN INSIEME. 84
- DEF6.4.1.** CONTINUITÀ UNIFORME. 85
- DEF6.4.2.** SUCCESSIONE DI CAUCHY, SPAZI COMPLETI E DI BANACH. 86
- DEF6.4.3.** CONTRAZIONE. 89
- DEF6.4.4.** PUNTO FISSO. 89
- DEF7.0.1.** DISTANZA PRODOTTO. 93
- DEF7.0.2.** FUNZIONE DEFINITA IMPLICITAMENTE. 94
- DEF7.3.1.** SUPERFICIE REGOLARE PARAMETRIZZATA. 101
- DEF7.4.1.** OMEOMORFISMO. 103
- DEF7.4.2.** DIFFEOMORFISMO. 104
- DEF8.1.1.** MASSIMO, MINIMO VINCOLATI; VINCOLO. 107
- DEF8.1.2.** PUNTO REGOLARE, SINGOLARE. 107
- DEF8.2.1.** PUNTO CRITICO VINCOLATO O CONDIZIONATO. 108
- DEF9.0.1.** EQUAZIONE DIFFERENZIALE. 117
- DEF9.0.2.** SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA. 118
- DEF9.1.1.** MODELLO DI MALTHUS. 119
- DEF9.1.2.** EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI. 120
- DEF9.3.1.** PROBLEMA DI CAUCHY. 125
- DEF9.4.1.** LIPSCHITZIANITÀ IN  $y$ , UNIFORMEMENTE RISPETTO A  $t$ . 126
- DEF9.4.2.** INTERVALLO MASSIMALE D'ESISTENZA. 134
- DEF9.6.1.** INTEGRALE GENERALE. 137
- DEF9.6.2.** SOLUZIONE FONDAMENTALE. 138
- DEF10.1.1.** FUNZIONE RIEMANN-INTEGRABILE. 148
- DEF10.1.2.** AMPIEZZA DI UNA SUDDIVISIONE. 149
- DEF10.1.3.** INTEGRALE DI CAUCHY. 149
- DEF10.4.1.** FUNZIONE INTEGRABILE SU UN INSIEME GENERICO. 153
- DEF10.4.2.** INSIEME MISURABILE - FUNZIONE CARATTERISTICA. 154
- DEF10.4.3.** INSIEME MISURABILE - AREE DEI POLIGONI APPROSSIMANTI. 154
- DEF10.4.4.** REGIONE  $y$ -SEMPLICE. 156

<b>DEF10.4.5.</b>	REGIONE $x$ -SEMPLICE.	157	<b>DEF10.5.5.</b>	MOMENTO D'INERZIA.	161
<b>DEF10.4.6.</b>	FUNZIONE GENERALMENTE CONTINUA.	157	<b>DEF10.7.1.</b>	INTEGRALE IMPROPRIO.	166
<b>DEF10.4.7.</b>	INSIEMI SEMPLICEMENTE DECOMPONIBILI.	159	<b>DEF10.8.1.</b>	AREA DI UNA SUPERFICIE.	167
<b>DEF10.5.1.</b>	DENSITÀ SUPERFICIALE.	159	<b>DEF10.8.2.</b>	INTEGRALE DI SUPERFICIE.	167
<b>DEF10.5.2.</b>	VOLUME.	160	<b>DEF10.9.1.</b>	CURVA POSITIVAMENTE ORIENTATA.	168
<b>DEF10.5.3.</b>	DENSITÀ VOLUMICA.	160	<b>DEF10.12.1.</b>	SOLIDO DI ROTAZIONE.	175
<b>DEF10.5.4.</b>	BARICENTRO.	161			

---

## ELENCO DEI TEOREMI

### CAPITOLO 1:

<b>THM1.2.1.</b>	DIFFERENZIALE TOTALE.	5	<b>THM4.3.1.</b>	CARATTERIZZAZIONE DELLE FORME ESATTE.	35
<b>THM1.3.1.</b>	DERIVAZIONE SOTTO IL SEGNO D'INTEGRALE.	6	<b>THM4.4.1.</b>	LEMMA DI POINCARÉ PER DOMINI STELLATI.	38
<b>COR2.1.1.</b>	CARATTERIZZAZIONE DELLA CONTINUITÀ PER FUNZIONI VETTORIALI.	8	<b>THM4.4.2.</b>	LEMMA DI POINCARÉ PER APERTI SEMPLICEMENTE CONNESSI.	40
<b>PRT2.3.1.</b>	DELLE APPLICAZIONI LINEARI.	10	<b>THM4.5.1.</b>	ENERGIA CINETICA.	42
<b>THM2.5.1.</b>	REGOLA DELLA CATENA.	12	<b>THM4.6.1.</b>	METODO DELLE INTEGRAZIONI PARZIALI.	43
<b>THM2.6.1.</b>	TEOREMA DEL VALOR MEDIO GENERALIZZATO.	14	<b>THM4.6.2.</b>	METODO DELLE POLIGONALI.	44
<b>THM2.6.2.</b>	MAGGIORAZIONE DI LAGRANGE DEBOLE.	14	<b>THM5.2.1.</b>	DI LIMITATEZZA.	51
<b>PRT2.7.1.</b>	DELL'INTEGRALE DI FUNZIONI VETTORIALE.	15	<b>THM5.2.2.</b>	SCAMBIO DI LIMITI.	52
<b>THM3.3.1.</b>	CALCOLO DELLA LUNGHEZZA DI UNA CURVA.	24	<b>COR5.2.1.</b>	DI CONVERGENZA PER SUCCESSIONI.	53
<b>PRT3.5.1.</b>	INVARIANZA DELLA LUNGHEZZA PER RIPARAMETRIZZAZIONE.	26	<b>THM5.2.3.</b>	PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE.	53
<b>PRT3.8.1.</b>	DELL'INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE.	28	<b>THM5.2.4.</b>	DI DERIVABILITÀ PER SUCCESSIONI.	54
<b>PRT4.2.1.</b>	DEGLI INTEGRALI CURVILINEI DI SECONDA SPECIE.	33	<b>COR5.2.2.</b>	DERIVABILITÀ DEGLI ORDINI SUPERIORI PER SUCCESSIONI.	55
			<b>THM5.3.1.</b>	SCAMBIO TRA LIMITE E SERIE.	59
			<b>COR5.3.1.</b>	DI CONVERGENZA PER SERIE.	59
			<b>THM5.3.2.</b>	SCAMBIO FRA INTEGRALE E SERIE.	59



- THM5.3.3.** DERIVABILITÀ TERMINE A TERMINE. 59
- COR5.3.2.** DERIVABILITÀ DEGLI ORDINI SUPERIORI PER SERIE. 60
- COR5.3.3.** DERIVABILITÀ PER SERIE A DOMINIO VETTORIALE. 60
- THM5.4.1.** DI CAUCHY-HADAMARD. 63
- THM5.4.2.** CONVERGENZA UNIFORME DI UNA SERIE DI POTENZE. 65
- THM5.4.3.** DI ABEL PER SERIE DI POTENZE REALI. 67
- THM5.4.4.** DI ABEL PER SERIE DI POTENZE COMPLESSE. 69
- THM5.4.5.** CONVERGENZA UNIFORME DATA CONVERGENZA ASSOLUTA SUL BORDO. 69
- THM5.4.6.** CONDIZIONE SUFFICIENTE DI ANALITICITÀ. 70
- THM6.4.1.** HEINE-CANTOR. 85
- THM6.4.2.** HEINE-BOREL. 85
- THM6.4.3.** WEIERSTRASS. 85
- THM6.4.4.** BOLZANO-WEIERSTRASS. 85
- THM6.4.5.**  $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$  È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO. 87
- THM6.4.6.**  $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_{C^0([a, b])})$  È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO. 87
- THM6.4.7.** COMPLETEZZA DEGLI OPERATORI LIMITATI. 88
- THM6.4.8.** CONVERGENZA ASSOLUTA E PUNTUALE IN SPAZI DI BANACH. 89
- THM6.4.9.** CONTRAZIONI O DI BANACH-CACCIOPPOLI. 89
- THM6.4.10.** LIPSCHITZIANITÀ DI UNA FUNZIONE  $C^1$ . 92
- COR7.0.1.** VERSIONE PARAMETRICA DEL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI. 93
- THM7.1.1.** TEOREMA DI DINI. 96
- COR7.3.1.** SUPERFICI REGOLARI PER IL TEOREMA DI DINI. 102
- THM7.3.1.** SCAMBIO DELLE COORDINATE. 102
- THM7.4.1.** INVERSIONE LOCALE. 103
- THM8.2.1.** DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE. 108
- THM8.2.2.** LEGAME TRA PUNTI REGOLARI E CRITICI. 109
- THM8.3.1.** SPETTRALE PER MATRICI SIMMETRICHE REALI. 110
- THM9.4.1.** ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE. 127
- THM9.4.2.** DI PEANO. 132
- THM9.4.3.** REGOLARITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY. 132
- THM9.4.4.** 133
- LEM9.5.1.** DI BISI. 135
- THM9.5.1.** ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE. 136
- THM9.6.1.** SOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI. 139
- THM9.7.1.** TEOREMA DELL'ASINTOTO. 140
- THM10.1.1.** INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI LIMITATE. 150
- THM10.1.2.** LE FUNZIONI CONTINUE SONO INTEGRABILI. 150
- THM10.3.1.** DI RIDUZIONE. 151
- COR10.3.1.** INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE. 152
- THM10.4.1.** INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI LIMITATE GENERALMENTE CONTINUE. 158
- COR10.4.1.** INTEGRABILITÀ SUGLI APERTI DI UN'UNIONE. 159
- THM10.6.1.** CAMBIAMENTO DI VARIABILE PER INTEGRALI DOPPI. 163
- COR10.6.1.** AREA DI UN INSIEME MISURABILE DEFORMATO. 163
- LEM10.9.1.** INTEGRALI DI DERIVATE PARZIALI IN UN DOMINIO CON FRONTIERA DI JORDAN. 168
- THM10.9.1.** DI GAUSS-GREEN. 170

**THMio.9.2.** DEL ROTORE O DI STOKES E DELLA DIVERGENZA NEL PIANO. 171

**THMio.9.3.** TEOREMA DELLA DIVERGENZA NELLO SPAZIO. 173

**THMio.12.1.** DI PAPPUS-GULDINO. 175



# BIBLIOGRAFIA

---

- [Kos80] C. Kosniowski. *A First Course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 1980. ISBN: 9780511569296. DOI: 10.1017/CB09780511569296. URL: <https://www.cambridge.org/core/books/first-course-in-algebraic-topology/7067E8F26FE478B4A27E0A426A63C8DA>.
- [AB97] Emilio Acerbi e Giuseppe Buttazzo. *Primo corso di Analisi Matematica*. Pitagora Editrice Bologna, 1997. ISBN: 9788837109424.
- [Bar+13] V. Barutello et al. *Analisi matematica Vol. 2*. Apogeo Education - Maggioli Editore, 2013. ISBN: 9788838785917.
- [Man14] M. Manetti. *Topologia*. UNITEXT. Springer Milan, 2014. ISBN: 9788847056626. URL: <https://www.springer.com/gp/book/9788847056619>.
- [PS15] Carlo Domenico Pagani e Sandro Salsa. *Analisi matematica 1*. Zanichelli, 2015. ISBN: 9788808151339.
- [PS16] Carlo Domenico Pagani e Sandro Salsa. *Analisi matematica 2*. Zanichelli, 2016. ISBN: 9788808637086.
- [AB21] Elisa Antuca e Massimo Bertolotti. *Manualozzo di Geometria 2*. 2° edizione. 2021. URL: <https://ilterzopiano.eu/manualozzi>.



# INDICE ANALITICO

---

- I-forma, 31
- ampiezza di una suddivisione, 149
- aperto
  - stellato, 38
- applicazione
  - lineare, 10
- arcolunghezza, 27
- area di una superficie, 167
- ascissa curvilinea, 27
- baricentro, 161
- cambiamento di parametro, 21
- cambio di variabile per integrali doppi,  
163
- campo
  - centrale, 41
  - conservativo, 34
  - irrotazionale, 37
  - vettoriale, 16, 31
- continuità
  - funzione a valori vettoriali, 8
  - in un insieme, 84
  - in un punto, 84
  - uniforme, 85
- contrazione, 89
- convergenza
  - assoluta, 57
  - criteri di Cauchy per la, 51
  - puntuale, 48
    - di una serie di funzioni, 56
  - totale, 58
  - uniforme, 48
    - di una serie di funzioni, 56
- curva
  - cartesiana, 20
  - chiusa, 20
  - di classe  $C^k$ , 20
  - di Jordan, 21
  - equivalente, 21
  - lunghezza, 22
  - parametrica, 19
  - piana, 20
  - positivamente orientata, 168
  - regolare, 20
    - a tratti, 27
  - rettificabile, 22
  - semplice, 20
  - unione, 26
- curve
  - omotope, 39
- densità
  - superficiale, 159
  - volumica, 160
- diffeomorfismo, 104
- differenziabilità per funzioni a valori scalari, 4
- differenziale, 11
- distanza, 82
  - equivalente, 83
  - prodotto, 93
- divergenza, 16
- equazione
  - differenziale alle derivate parziali,  
117
- equazione differenziale
  - ordinaria, 117
  - del II ordine
    - non omogenea, 142
  - lineare
    - non omogenea, 140
- forma

- argomento, 37
- chiusa, 37
- esatta, 34
- formula
  - di Gauss-Green, 170
- funzione
  - a valori vettoriali, 7
  - analitica, 70
  - definita implicitamente, 94
  - differenziabile, 11
  - generalmente continua, 157
  - integrabile, 15
  - lipschitziana in  $y$ , 126
  - localmente lipschitziana in  $y$ , 126
  - olomorfa, 68
  - Riemann-integrabile su  $\mathbb{R}$ , 148
- gradiente, 4, 16
- insieme
  - aperto/chiuso, 84
  - compatto, 84
  - limitato, 84
  - misurabile, 154
- integrale
  - curvilineo di prima specie, 28
  - curvilineo di seconda specie, 33
  - di Cauchy, 149
  - di Riemann, 148
  - di superficie, 167
  - generale, 137
  - improprio, 166
  - per fili, 174
  - per strati, 174
- intervallo
  - massimale d'esistenza, 134
- intorno
  - sferico, 82
- iperpiano tangente, 5, 100
- laplaciano, 17
- limite
  - funzione a valori vettoriali, 7
  - funzioni a valori scalari, 3
  - in uno spazio metrico, 83
  - per successioni di numeri complessi, 47
- lunghezza d'arco, 27
- massa di un filo, 29
- massimo/minimo vincolato, 107
- matrice wronskiana, 138
- modello di Malthus, 119
- moltiplicatore di Lagrange, 106–108
- momento
  - d'inerzia, 161
- norma, 79
  - $-p$ , 80
  - equivalente, 83
  - lagrangiana, 81
  - operatoriale, 10
- omeomorfismo, 103
- palla, 82
- potenziale, 34
- problema di Cauchy, 125
- punto
  - critico vincolato, 108
  - fisso, 89
  - regolare, 107
  - singolare, 107
- raggio di convergenza, 63
- regione
  - $x$ -semplice, 157
  - $y$ -semplice, 156
- rotore, 17
- serie
  - derivata, 67
  - di potenze, 62
  - di Taylor, 69
- simplesso, 112
- sistema omogeneo di equazioni differenziali ordinarie, 136
- solido di rotazione, 175
- soluzione fondamentale, 138
- spazio
  - di Banach, 86
  - metrico, 82
  - metrico completo, 86
  - normato, 79
  - semplicemente connesso, 40
- successione
  - di Cauchy in uno spazio metrico, 86
  - di funzioni, 48
- superficie regolare parametrizzata, 101
- teorema
  - d'esistenza e unicità, 127

- d'esistenza e unicità globale, 136
- d'inversione locale, 103
- dell'asintoto, 140
- delle contrazioni, 89
- di Abel
  - per serie di potenze complesse, 69
  - per serie di potenze reali, 67
- di Bolzano-Weierstrass, 85
- di Dini, 96
- di Gauss-Green, 170
- di Heine-Borel, 85
- di Heine-Cantor, 85
- di riduzione, 151
- di Weierstrass, 85
- termine forzante, 136
  
- velocità, 9
- vettore derivata, 9
- vincolo, 105, 107
- volume, 160
- volume di un solido di rotazione, 175
  
- wronskiano, 138



