

Massimo Bertolotti

IL DOTTOR NEWTON

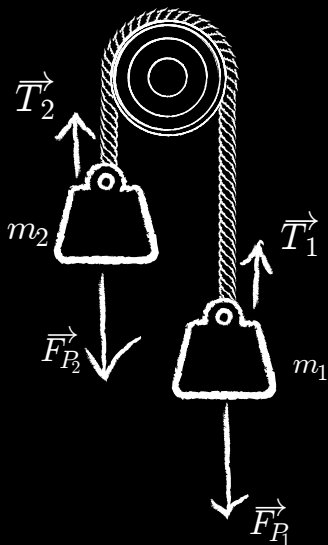
OVVERO: COME HO IMPARATO
A NON PREOCCUPARMI
E AD AMARE LA FISICA



Manualozzo di Fisica 1

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

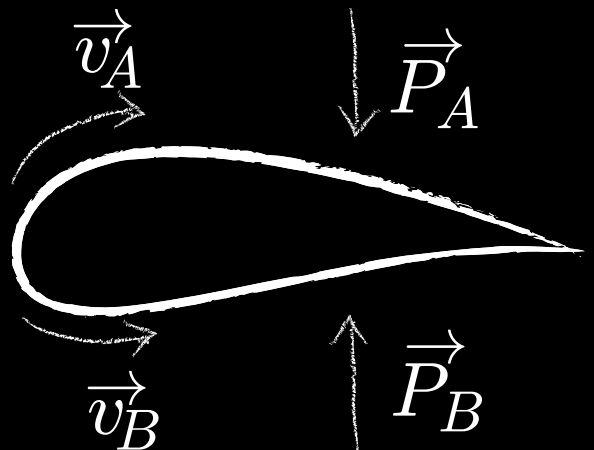
$$\gamma = 4\pi^2 / m_T k_S = 4\pi^2 / m_S k_T = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$



$$P(h) = P_{atm} + \rho g h$$

$$E_P^I + E_K^I = E_P^F + E_K^F$$

$$PV = nRT$$



$$f(v) dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v dv$$

NOTE PER LA LETTURA

“Fisica è, si spera, semplice. I fisici non lo sono.”

EDWARD TELLER, *reduce da un esame (non passato) di Fisica 1.*

SENZA troppe pretese di formalità, com'è intuibile dal termine dal termine tecnico *S manualozzo* e dalle citazioni a inizio capitolo, queste note sono nate come appunti basati sul corso di *Fisica 1 - corso A* - tenuto dai docenti Marco Costa e Antonaldo Diaferio nell'Anno Accademico 2019-2020 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino.

Il corso è diviso in *due* parti (più una piccola introduzione alla Fisica), pertanto abbiamo ritenuto opportuno dividere in altrettante parti il testo, seguendo l'ordine delle lezioni: Meccanica Classica e Dinamica della Materia. I prerequisiti necessari sono gli argomenti trattati nei corsi di *Geometria 1* e *Analisi 1*.

In aggiunta a ciò, potete trovare a fine libro delle utili *postille* con un formulario, una lista delle costanti fisiche più usate e delle unità di misura affrontate durante il corso.

Per quanto mi piacerebbe esserlo, non sono un *essere infallibile*: mi saranno sfuggiti degli errori (o degli *errori*, la cui causa è solamente dell'autore che non ha studiato bene e non dei professori, chiaramente), per cui vi chiedo gentilmente di segnalarli su <https://maxmaci.github.io> per correggerli e migliorare le future edizioni del *manualozzo*.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.

INDICE

INDICE ii

I INTRODUZIONE ALLA FISICA 1

1	INTRODUZIONE ALLA FISICA	3
1.1	Il metodo della scienza	3
1.1.1	Metodo scientifico	3
1.1.2	Grandezze, misure, errori	4
1.1.3	Grafici e leggi matematiche	5
1.2	Grandezze fisiche: scalari e vettori	6
1.2.1	Somma di vettori	7
1.2.2	Differenza di vettori	8
1.2.3	Moltiplicazione di un vettore per uno scalare	8
1.2.4	Componenti cartesiane	8
1.2.5	Prodotto scalare	10
1.2.6	Prodotto vettoriale	11

II MECCANICA CLASSICA 13

2	CINEMATICA	15
2.1	Introduzione alla cinematica	15
2.1.1	Tempo ed eventi	15
2.1.2	Sistema di riferimento	16
2.1.3	Traiettoria	17
2.2	Moto rettilineo	17
2.2.1	Velocità media e istantanea	18
2.2.2	Accelerazione media e istantanea	19
2.2.3	Moto rettilineo uniforme	20
2.2.4	Moto uniformemente accelerato	20
2.3	Moto verticale: caduta di un grave o moto in caduta libera	22
2.4	Moto periodico	23
2.4.1	Moto armonico semplice	23
2.5	Moto in due e in tre dimensioni	25
2.5.1	Velocità in due o tre dimensioni	26
2.5.2	Velocità in due in componenti	27
2.5.3	Accelerazione in due o tre dimensioni	28

2.6	Moto parabolico	29
2.6.1	Accenni di velocità di fuga	31
2.7	Moto circolare	32
2.7.1	Moto circolare uniforme	32
2.7.2	Moto circolare non uniforme	33
3	DINAMICA I: FORZE	35
3.1	Introduzione alla dinamica	35
3.2	Forza	35
3.2.1	Massa e forza	35
3.2.2	Il dinamometro	36
3.3	I tre principi della dinamica	36
3.3.1	Primo principio o principio di inerzia	36
3.3.2	Secondo principio o legge di Newton	36
3.3.3	Terzo principio della dinamica o principio di azione-reazione	37
3.4	Quantità di moto	38
3.4.1	Teorema dell'impulso	39
3.4.2	Accenni agli urti	39
3.5	Moti e forze	40
3.6	Diversi tipi di forze	40
3.6.1	Forza peso	40
3.6.2	Reazioni vincolari	40
3.6.3	Forza elastica	41
3.6.4	Forze di attrito	43
3.7	Forze centripete	46
3.8	Applicazioni delle forze	46
3.8.1	Piano inclinato	46
3.8.2	Funi e carrucole	47
3.8.3	Pendolo	49
3.9	Momento	50
3.9.1	Momento angolare	50
3.9.2	Momento di una forza	51
3.9.3	Teorema del momento angolare	52
3.9.4	Teorema del momento dell'impulso	52
4	DINAMICA II: LAVORO ED ENERGIA	53
4.1	Lavoro	53
4.1.1	Potenza	54
4.2	Energia e lavoro	54
4.2.1	Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica	54
4.2.2	Lavoro della forza peso	55
4.2.3	Lavoro della forza elastica	57
4.2.4	Lavoro della forza d'attrito radente	57
4.3	Forze conservative e non conservative	57
4.3.1	Energia meccanica	58
4.3.2	Forze dissipative	60
4.3.3	Lavoro delle forze non conservative	60
5	DINAMICA III: GRAVITAZIONE	63
5.1	Forze centrali	63

5.1.1	Momenti e forze centrali	63
5.1.2	Lavoro delle forze centrali	64
5.2	Leggi di gravitazione di Keplero	65
5.2.1	Misura di γ con la bilancia di torsione di Cavendish	66
5.2.2	Legge gravitazionale sulla superficie terrestre	66
5.3	Campo gravitazionale	66
5.4	Energia potenziale del campo gravitazionale	67
5.5	Velocità di fuga	68
6	DINAMICA IV: SISTEMI DI PUNTI	69
6.1	Dinamica dei sistemi di punti	69
6.2	Centro di massa	70
6.3	Conservazione della quantità di moto	71
6.4	Centro di massa e momento angolare	72
6.5	Teorema del momento angolare	72
6.6	Conservazione del momento angolare	73
6.7	Sistema di riferimento del centro di massa	73
6.8	I Teorema di König (per il momento angolare)	74
6.9	II Teorema di König (per l'energia cinetica)	75
7	DINAMICA V: URTI	77
7.1	Urti	77
7.2	Quantità di moto e urti	77
7.3	Energia cinetica negli urti	78
7.4	Urto completamente anelastico	79
7.4.1	Pendolo balistico	80
7.5	Urto elastico	80
7.5.1	Durante l'urto	82
8	DINAMICA VI: CORPO RIGIDO	83
8.1	Corpo rigido	83
8.1.1	Densità del corpo rigido	83
8.2	Centro di massa del corpo continuo	84
8.2.1	Forza peso e centro di massa	85
8.2.2	Energia potenziale e centro di massa	85
8.3	Moto del corpo rigido	85
8.3.1	Traslazione	86
8.3.2	Rotazione	86
8.3.3	Rotazioni intorno ad un asse fisso	86
8.4	Momento di inerzia	87
8.4.1	Componente ortogonale del momento angolare	87
8.4.2	Equazione del moto del corpo rigido	87
8.4.3	Energia cinetica in rotazione	88
8.4.4	Lavoro in rotazione	88
8.4.5	Momento di inerzia nel corpo continuo	88
8.4.6	Teorema di Huyghens-Steiner	89
8.5	Casi particolari di momenti di inerzia	89

III DINAMICA DELLA MATERIA 93

- 9 INTRODUZIONE ALLA DINAMICA DELLA MATERIA 95
 - 9.1 Materia 95
 - 9.2 Sforzo 95
 - 9.2.1 Deformazioni 96
 - 9.2.2 Compressione e comprimibilità 97

- 10 IDROSTATICA 99
 - 10.1 Principio di isotropia di Pascal 99
 - 10.1.1 Il torchio idraulico 100
 - 10.2 Legge di Stevino 100
 - 10.2.1 Pressione atmosferica 101
 - 10.3 Principio di Archimede 102
 - 10.3.1 Il principio di Archimede in rotazione 103

- 11 FLUIDODINAMICA I: FLUIDI IDEALI 105
 - 11.1 Equazione di Bernoulli 105
 - 11.1.1 Teorema di Torricelli 107
 - 11.2 Legge di Leonardo 107
 - 11.3 Fenomeno di Venturi 108
 - 11.3.1 Volo e portanza 109

- 12 FLUIDODINAMICA II: FLUIDI REALI 111
 - 12.1 Fluidi reali 111
 - 12.2 Viscosità e perdita di carico 111
 - 12.2.1 Definizione operativa della viscosità 112
 - 12.3 Regime di moto laminare e moto turbolento 112
 - 12.3.1 Numero di Reynolds 113
 - 12.4 Moto dei corpi nei fluidi 114
 - 12.4.1 Goccia d'acqua 115
 - 12.4.2 Velocità di sedimentazione e centrifuga 115
 - 12.5 Fenomeni superficiali 116
 - 12.5.1 Bolle e gocce 116
 - 12.6 Tensioni superficiali e pareti 118
 - 12.6.1 Capillarità 118

- 13 TERMODINAMICA I: TERMOMETRIA 121
 - 13.1 Termodinamica 121
 - 13.1.1 Termologia 121
 - 13.2 Sistema termodinamico 121
 - 13.2.1 Variabili termodinamiche ed equilibrio termodinamico 122
 - 13.3 Equazioni di stato 122
 - 13.3.1 Coefficienti termometrici 122
 - 13.4 Definizioni operative di temperatura 123
 - 13.5 Gas perfetti 123
 - 13.5.1 Trasformazioni particolari di gas perfetti 124
 - 13.6 Equazione di stato dei gas perfetti 124
 - 13.7 Equazione di stato dei gas reali 125
 - 13.8 Postulato zero della termodinamica 127

- 13.8.1 Un'altra definizione operativa di temperatura 128
- 14 TERMODINAMICA II: CALORIMETRIA 131
 - 14.1 Calore 131
 - 14.2 Calore latente 132
 - 14.3 Calorimetro 132
 - 14.3.1 Caloria 132
 - 14.4 Calore specifico 132
 - 14.4.1 Capacità termica 133
 - 14.5 Metodi di scambio di calore 133
 - 14.5.1 Conduzione 133
 - 14.5.2 Convezione 135
 - 14.5.3 Irraggiamento 135
- 15 TERMODINAMICA III: IL PRIMO PRINCIPIO 137
 - 15.1 Trasformazione 137
 - 15.1.1 Sistema aperto e chiuso 137
 - 15.1.2 Trasformazioni irreversibili e reversibili 137
 - 15.2 Lavoro termodinamico 138
 - 15.2.1 Lavoro e trasformazioni cicliche 138
 - 15.3 Principio di equivalenza di Joule-Mayer 139
 - 15.4 Energia interna e primo principio della Termodinamica 139
 - 15.5 Lavoro, calore ed energia interna nelle trasformazioni 141
 - 15.5.1 Lavoro, calore ed energia interna nelle trasformazioni isocore 141
 - 15.5.2 Lavoro, calore ed energia interna nelle trasformazioni isobare 141
 - 15.5.3 Lavoro, calore ed energia interna nelle isoterme 142
 - 15.5.4 Lavoro, calore ed energia interna nelle trasformazioni adiabatiche 142
 - 15.6 Esperimento dell'espansione libera di Joule 143
 - 15.7 Relazione di Mayer 144
 - 15.8 Equazione di Poisson 145
 - 15.8.1 Lavoro compiuto da una adiabatica 146
 - 15.9 Trasformazione politropica 147
 - 15.9.1 Tanti tipi di trasformazioni politropiche 147
 - 15.9.2 Lavoro di una trasformazione politropica 148
- 16 TERMODINAMICA IV: IL SECONDO PRINCIPIO 149
 - 16.1 Il secondo principio della Termodinamica 149
 - 16.1.1 Sorgente o serbatoio 149
 - 16.1.2 Macchina termica 150
 - 16.1.3 Postulato di Clausius 150
 - 16.1.4 Postulato di Kelvin-Planck 150
 - 16.1.5 L'equivalenza dei due enunciati del secondo principio 151
 - 16.2 Rendimento 152
 - 16.3 Alcuni tipi di cicli 152
 - 16.3.1 Macchina di Carnot 152
 - 16.3.2 Rendimento della macchina di Carnot 153
 - 16.3.3 Ciclo Otto o di Beau de Rochas 154
 - 16.3.4 Ciclo Diesel 154
 - 16.4 Teorema di Carnot 155

- 16.5 Teorema di Clausius 156
- 16.6 Entropia 158
 - 16.6.1 Entalpia ed entropia 158
 - 16.6.2 Un'espressione dell'entropia 159
 - 16.6.3 Entropia e reversibilità delle trasformazioni 160
 - 16.6.4 Principio dell'entropia 161
- 17 TERMODINAMICA V: TEORIA CINETICA DEI GAS 163
 - 17.1 Teoria cinetica dei gas 163
 - 17.1.1 Gas ideale 163
 - 17.2 Teorema del viriale 164
 - 17.3 Dal viriale al legame tra macro e micro 164
 - 17.4 Temperatura ed energia cinetica 165
 - 17.5 Distribuzione delle velocità 167
 - 17.6 Gradi di libertà e calori specifici 171
 - 17.6.1 La crisi dei calori specifici 172
 - 17.7 Probabilità e reversibilità 173
 - 17.8 Il terzo principio della termodinamica 176
- 18 ONDE MECCANICHE 177
 - 18.1 Onde meccaniche 177
 - 18.1.1 Velocità dell'onda 178
 - 18.1.2 Equazione d'onda di d'Alambert 178
 - 18.1.3 Velocità del suono 179
 - 18.2 Energia di un'onda 180
 - 18.2.1 Potenza di un'onda 181
 - 18.2.2 Intensità di un'onda 181
 - 18.3 Effetto Doppler 184
 - 18.4 Sovrapposizione di onde 184
 - 18.5 Onde stazionarie 186
 - 18.5.1 Densità di energia dell'onda stazionaria 187
- IV APPENDICI 189
- 19 FORMULARIO 191
 - 19.1 Introduzione 191
 - 19.1.1 Introduzione alla Fisica 191
 - 19.2 Meccanica classica 192
 - 19.2.1 Cinematica 192
 - 19.2.2 Dinamica I: forze 194
 - 19.2.3 Dinamica II: lavoro ed energia 195
 - 19.2.4 Dinamica III: gravitazione 196
 - 19.2.5 Dinamica IV: sistema di punti 197
 - 19.2.6 Dinamica V: urti 197
 - 19.2.7 Dinamica VI: corpo rigido 198
 - 19.3 Dinamica della materia 200
 - 19.3.1 Introduzione alla dinamica della materia 200
 - 19.3.2 Idrostatica 200
 - 19.3.3 Fluidodinamica I: fluidi ideali 200

19.3.4	Fluidodinamica II: fluidi reali	201
19.3.5	Termodinamica I: termometria	201
19.3.6	Termodinamica II: calorimetria	202
19.3.7	Termodinamica III: il primo principio	203
19.3.8	Termodinamica IV: il secondo principio	203
19.3.9	Termodinamica V: teoria cinetica dei gas	204
19.3.10	Onde meccaniche	205
20	COSTANTI	207
20.1	Meccanica classica	207
20.1.1	Cinematica	207
20.1.2	Dinamica III: gravitazione	207
20.2	Dinamica della materia	207
20.2.1	Introduzione alla dinamica della materia	207
20.2.2	Fluidodinamica I: fluidi ideali	208
20.2.3	Termodinamica I: termometria	208
20.2.4	Termodinamica II: calorimetria	208
20.2.5	Termodinamica III: il primo principio	208
20.2.6	Termodinamica V: teoria cinetica dei gas	208
20.2.7	Onde meccaniche	208
20.2.8	Altre costanti	209
21	UNITÀ DI MISURA	211
	INDICE ANALITICO	215

I

INTRODUZIONE ALLA FISICA

INTRODUZIONE ALLA FISICA

“Nella scienza esiste solo la fisica; tutto il resto è collezione di francobolli.”

ERNEST RUTHERFORD, *collezionista di francobolli.*

1.1 IL METODO DELLA SCIENZA

LA FISICA è la scienza *quantitativa* che studia e descrive i fenomeni naturali allo scopo di individuare le relazioni tra questi e le leggi che li governano. Possiamo suddividere la fisica in due branche principali:

- La fisica **classica**: comprende la meccanica classica, dinamica della materia, elettromagnetismo, ottica, acustica; è adatta a studiare fenomeni che riguardano oggetti di dimensione *macroscopica* che si muovono a velocità *molto inferiori* a quella della luce.
- La fisica **moderna**: comprende la relatività e la meccanica quantistica; studiano, rispettivamente, fenomeni con velocità *molto vicine* a quella della luce e con dimensioni prossime a quelle degli atomi e delle particelle subatomiche (dimensioni *microscopiche*).

1.1.1 Metodo scientifico

La fisica non esiste senza esperimento. I problemi fisici sono riconducibili a degli schemi comuni attraverso il **metodo scientifico**:

- *Osservare* e descrivere quantitativamente un dato fenomeno e le sue condizioni iniziali.
- *Formulare un'ipotesi* di legge matematica che lo possa spiegare, eventualmente inquadrandola in una *teoria*.
- *Dedurre* delle conseguenze da queste ipotesi.
- *Verificare sperimentalmente* le conseguenze, con quantificazione delle *grandezze e misura*.
- *Confermare o confutare* le ipotesi, nel caso negativo ripetere il procedimento.

ATTENZIONE! La descrizione qualitativa e quella quantitativa sono entrambe importanti, ma diverse. All'inizio il fenomeno viene descritto *qualitativamente*:

“Uno sciatore si trova in cima alla pista, scende giù, salta dalla cunetta e fa una piroetta.”

Il passaggio successivo è descrivere *quantitativamente* il fenomeno, con grandezze e misure:

“Uno sciatore è partito ad un'altezza h , raggiunge la cunetta ad una velocità v ed ha un angolo di rotazione θ ...”

Seppur entrambe importanti, per formulare un'ipotesi di legge è necessario descrivere quantitativamente il fenomeno.

DIGRESSIONE. In un fenomeno naturale intervengono molti input e spesso molti sono difficili da descrivere. Nella creazione di un modello più o meno realistico del fenomeno è necessario quindi *semplificare*, scegliendo quali aspetti hanno più o meno rilevanza alla questione da studiare: ad esempio, è possibile che certi input che non sono facili da descrivere abbiano un *ordine perturbativo* più alto e quindi influiscano in misura minore. Questi temi verranno approfonditi nell'ambito della *meccanica hamiltoniana*.

1.1.2 Grandezze, misure, errori

Le **grandezze** o *quantità* sono definite se si è indicato un modo operativo per *misurarle* e se essa è *riproducibile*. Negli esperimenti possiamo distinguere quantità *misurabili*, cioè *l'osservabile* fisico che decidiamo negli esperimenti, e quantità *invarianti*, che non dipendono dal sistema di riferimento scelto.

Il procedimento di **misura** di una quantità consiste nell'individuare un'opportuna *unità di misura*, riportarla sulla grandezza in esame e contare il numero di volte che è stata riportata: la grandezza viene quindi espressa dal numero seguita dall'unità di misura. Le misure possono essere dirette o indirette.

- **Misura diretta:** effettuate con opportuni *strumenti* di misurazione (es. metro - spazio, cronometro - tempo, bilancia - massa, termometro - temperatura, ...).
- **Misura indiretta:** ricavabili attraverso il calcolo di un'espressione matematica dove compaiono le osservabili dirette (es. velocità - spazio, tempo; forza - massa, spazio e tempo).

Poiché un esperimento deve poter essere ripetuto in ogni dove e in ogni tempo (premesse le condizioni iniziali strettamente necessarie) e deve essere discusso con scienziati di altre lingue, risulta necessario definire delle unità di misura che siano ricavabili da chiunque: si è deciso di fissare delle **unità di misura fondamentali** da usare come campioni primari e da cui si possono ricavare tutte le altre.

Nel concetto di misura è intrinseca una certa **incertezza**, che non è possibile eliminare (anzi, nell'ambito della meccanica quantistica ciò è così evidente da diventare di fatto uno studio di probabilità) e dipende dalla natura non deterministica della Natura. Inoltre, per motivi analoghi, gli strumenti stessi hanno un limite (*precisione*) che influisce ulteriormente nell'errore di misure.

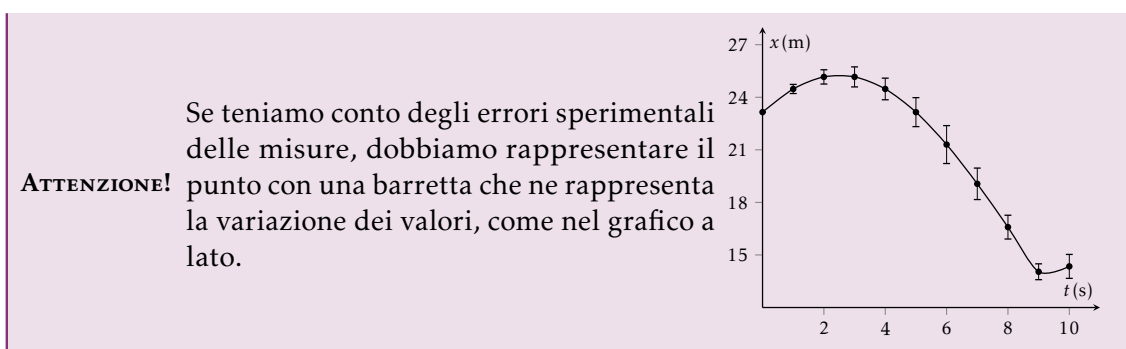
ESEMPIO. Nel misurare il tempo, gli orologi meccanici hanno una precisione inferiore rispetto agli orologi satellitari; a loro volta hanno una precisione molto inferiore agli orologi atomici al cesio-12.

Gli **errori** che possiamo commettere nella misurazione sono di due tipi:

- *Errore statistico*: ripetendo una stessa misurazione nelle stesse condizioni più di una volta troviamo comunque delle piccole variazioni che dipendono dalla incertezza insita nella misura, pertanto non è un *errore umano*; è possibile ridurlo *aumentando il numero di misure* (diminuisce con la radice quadrata delle misure fatte).
- *Errore sistematico*: dipende dal modo in cui osserviamo il fenomeno e può essere causato dalla posizione dell'osservatore (es. errore di *parallasse*) o anche dalle condizioni iniziali del fenomeno non costanti (temperatura, pressione, ...); essendo un *errore umano*, possiamo limitarlo ripetendo l'esperimento nelle *stesse condizioni* o misurando in *modo differente* (se otteniamo risultati contraddittori).

1.1.3 Grafici e leggi matematiche

Date due osservabili fisiche è possibile rappresentarle su un piano cartesiano ponendo una delle due osservabili sull'asse x e l'altra sull'asse y , mostrando l'**andamento** del fenomeno.

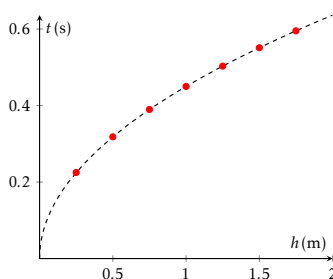


Lo scopo principale di rappresentare graficamente i valori ottenuti è quello di trovare la *linea di tendenza* che corrisponde ad una certa **legge matematica** (maggiori sono i punti ottenuti, più risulterà vincolato il modello).

DIGRESSIONE. Qual è la linea che meglio **interpola** i valori sperimentali (**fit**)? Il procedimento si basa sul minimizzare la differenza tra modello e risultato fisico. Ci sono varie metodologie, fra cui la principale è il *metodo del χ quadro*, basato sullo scarto al quadrato su tutti i punti.

Ad esempio, possiamo ottenere da un esperimento di caduta di un grave dei valori di altezza e tempo di caduta, rappresentarli su un grafico e vedere che la seguente legge passa per i punti sperimentali:

$$t = 0,45 \cdot \sqrt{h}$$



Ci si può allora chiedere “perché 0,45?”. Il coefficiente potrebbe effettivamente nascondere quale condizione di partenza non considerata, sul quale si possono fare ipotesi.

Tuttavia l'aspetto importante del trovare una legge di poter *prevedere* il comportamento di un sistema senza dover necessariamente effettuare un esperimento, che non è in alcuni casi fattibile. Riprendendo l'esempio di sopra, per misurare la profondità di un pozzo possiamo semplicemente misurare il tempo trascorso prima di sentire il tonfo nell'acqua, dato che la legge di prima può essere riscritta come:

$$t = 0,45 \cdot \sqrt{h} \implies \left(\frac{t}{0,45}\right)^2 = 4,94 \cdot t^2$$

ESEMPLI.

Restaurazione del David di Michelangelo. Grazie alla *fluorescenza a raggi X (XRF)*, una tecnica che consiste nel misurare l'energia E dei raggi X emessi da un materiale bombardato da raggi X, è possibile risalire al numero atomico Z del materiale con la *legge di Moseley*:

$$E = (10,2) \cdot (Z - 1)^2 \implies Z = \sqrt{\frac{E}{10,2}} + 1 \xrightarrow{E=2300 \text{ eV}} Z = \sqrt{\frac{2300}{10,2}} + 1 = 16$$

Nel David di Michelangelo è stato possibile individuare lo zolfo ($Z = 16$) da rimuovere nei punti in cui l'energia era pari a $E = 2300 \text{ eV}$.

Microscopia elettronica. La modalità di BackScattering (BS) si basa sull'ottenere delle immagini il cui contrasto delle tonalità di grigio dipende dal numero atomico dell'elemento chimico del campione. Il metodo si basa sulla misura del numero di elettroni retrodiffusi dopo un urto elastico (cioè un urto in cui non c'è perdita di energia interna): maggiore il numero atomico, più numerosi sono gli elettroni retrodiffusi e le immagini saranno più chiare:

$$\eta = \frac{\text{elettroni retrodiffusi}}{\text{elettroni incidenti}}, \text{ con elettroni retrodiffusi} < \text{elettroni incidenti}$$

Microscopio a forza atomica (AFM): Microscopio in grado di fornire l'immagine della topografia di un campione a risoluzione quasi atomica, basata sulla misura della forza agente fra il campione e una punta nanometrica, simile a quella dei giradischi, attaccata ad una molla.

1.2 GRANDEZZE FISICHE: SCALARI E VETTORI

Ci sono due tipi di grandezze.

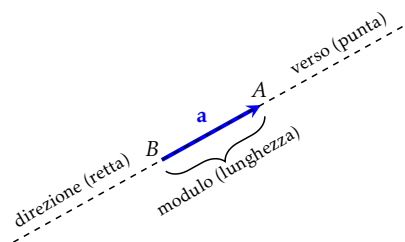
- **Grandezze scalari:** sono definite con la sola misura (numero e unità di misura), es. tempo - 10 s, massa - 2 kg, temperatura - 300 K...
- **Grandezze vettoriali:** sono definite con un **vettore**, cioè richiedono di fornire un *modulo* (una quantità scalare, es. 10km/h), una *direzione* (es. lungo la val d'Adige) e un *verso* (es. verso Trento).

In geometria abbiamo dato la definizione di **vet-tore** come l'insieme di tutti i *segmenti orientati* aventi stessa direzione, verso e modulo, cioè concordi.

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$$

Per *modulo del vettore* intendiamo la lunghezza di un qualsiasi segmento orientato corrispondente:

$$|\mathbf{a}| = \left| \overrightarrow{AB} \right| = \left| \vec{\mathbf{a}} \right| = a$$



ATTENZIONE! I vettori, in quanto famiglie di segmenti orientate, possono essere traslati a piacere per farci le operazioni necessarie. In ambito fisico, tuttavia, bisogna anche fare attenzione al **punto di applicazione** del vettore: non è sempre possibile traslare i vettori.

1.2.1 Somma di vettori

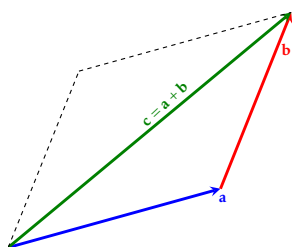


Figura 1.1: Metodo del puntacoda

Dati due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , possiamo calcolarne il vettore somma $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ attraverso il metodo del *puntacoda* e il *metodo del parallelogramma*.

Nel primo i vettori vengono messi uno di seguito, con la fine di uno coincidente con l'inizio dell'altro; il vettore somma ha origine nell'origine del primo vettore e punta nella punta dell'ultimo.

Nel secondo, i vettori (che devono però essere non collineari) vengono messi con l'origine comune a formare un parallelogramma (di cui due lati sono "proiezioni" dei due vettori che abbiamo); il vettore somma coincide con la diagonale principale del parallelogramma e ha origine coincidente con quella degli altri due vettori.

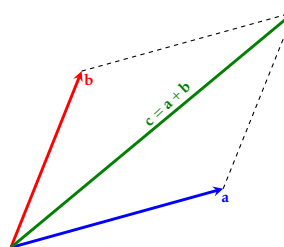


Figura 1.2: Metodo del parallelogramma

- **Proprietà commutativa:** $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- **Proprietà associativa:** $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

1.2.2 Differenza di vettori

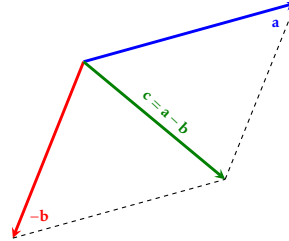
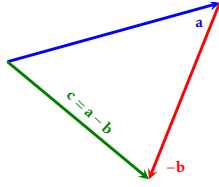


Figura 1.3: Metodo del punta coda

Figura 1.4: Metodo del parallelogramma

Per parlare di differenza di vettori, introduciamo il *vettore opposto*. Dato $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $-\mathbf{b} = \overrightarrow{BA}$ è il suo opposto: esso ha stessa direzione e modulo di \mathbf{b} , ma verso opposto (da qui il nome). Quindi, dati due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , possiamo calcolarne il vettore differenza $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ attraverso il metodo del *punta coda* e il *metodo del parallelogramma*, applicati ad \mathbf{a} e a $(-\mathbf{b})$. Notiamo come nel caso del metodo del parallelogramma \mathbf{c} corrisponda alla diagonale minore del parallelogramma.

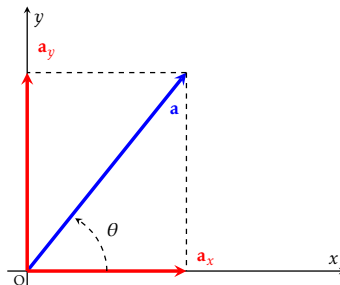
1.2.3 Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Il vettore $\mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{a}$ è un vettore collineare ad \mathbf{a} , di modulo $|\mathbf{b}| = |\alpha||\mathbf{a}|$ e verso uguale se $\alpha > 0$, opposto se $\alpha < 0$

- **Proprietà associativa:** $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a} = \beta(\alpha\mathbf{a})$
- **Proprietà distributiva rispetto allo scalare:** $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$
- **Proprietà distributiva rispetto al vettore:** $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$

1.2.4 Componenti cartesiane

I vettori possono essere *scomposti* secondo un sistema di **assi cartesiani ortogonali**, utili per ridurre un problema tridimensionale in due problemi bidimensionali o in tre problemi unidimensionali, più facili da studiare.



Guardiamo il caso bidimensionale. Fissiamo un'origine e due assi (asse x e asse y) tra loro perpendicolari. Un vettore \mathbf{a} , con origine nell'origine del sistema, è scomponibile nelle **componenti** \mathbf{a}_x e \mathbf{a}_y : essi sono vettori che hanno, rispettivamente, direzione dell'asse x e dell'asse y , mentre modulo e verso dipendono dall'angolo θ formato con il semiasse positivo x ; la loro somma risulta essere:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \quad (1.1)$$

Dalla trigonometria ricaviamo:

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos \theta \quad a_y = |\mathbf{a}| \sin \theta \quad (1.2)$$

Il modulo di \mathbf{a} può essere espresso in funzione delle due componenti grazie al teorema di Pitagora:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (1.3)$$

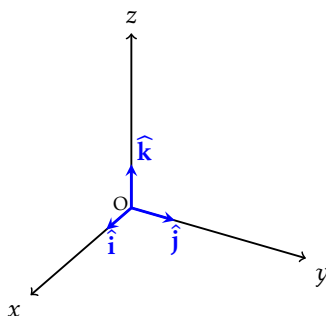
Inoltre, è possibile ricavare per proprietà trigonometriche l'angolo θ , note le due componenti:

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_x} \quad (1.4)$$

1.2.4.1 Versori

I **versori** degli assi cartesiani sono moduli particolari che:

- Hanno modulo 1.
- Sono diretti lungo gli assi cartesiani.
- Indicano il verso degli assi cartesiani.

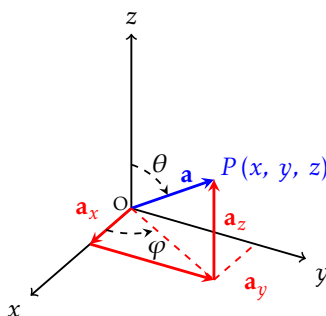


In questo modo, tutti i vettori possono essere scritti nella forma:

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}} \quad (1.5)$$

$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ sono i versori rispettivamente degli assi x, y e z , mentre a_x, a_y, a_z le componenti rispetto agli assi citati, con:

$$\begin{cases} a_x = a \sin \theta \cos \varphi \\ a_y = a \sin \theta \sin \varphi \\ a_z = a \cos \theta \end{cases} \quad (1.6)$$



Nel caso il vettore $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ non abbia origine negli assi, sapendo le coordinate dei punti $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ possiamo comunque scriverne le componenti e il modulo:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\hat{\mathbf{i}} + (y_B - y_A)\hat{\mathbf{j}} + (z_B - z_A)\hat{\mathbf{k}} \quad (1.7)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (1.8)$$

1.2.4.2 Operazioni con le componenti cartesiane

Dati:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{b} &= b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Le operazioni già viste possono essere espresse con le componenti cartesiane:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\hat{\mathbf{j}} + (a_z + b_z)\hat{\mathbf{k}} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_y - b_y)\hat{\mathbf{j}} + (a_z - b_z)\hat{\mathbf{k}} \quad (1.10)$$

$$\alpha\mathbf{a} = \alpha a_x\hat{\mathbf{i}} + \alpha a_y\hat{\mathbf{j}} + \alpha a_z\hat{\mathbf{k}} \quad (1.11)$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.12)$$

1.2.5 Prodotto scalare

Il **prodotto scalare** è un'operazione che associa ad una coppia di vettori uno scalare:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \quad (1.13)$$

Con θ l'angolo compreso tra i due vettori.

- **Proprietà commutativa:** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- **Proprietà associativa:** $\alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{b})$
- **Prodotto scalare di uno stesso vettore:** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = aa \cos 0 = a^2$
- **Prodotto scalare di vettori perpendicolari ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$):** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos 90^\circ = 0$
- **Prodotto scalare di vettori paralleli ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$):** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos 0^\circ = ab$

OSSERVAZIONE. Il prodotto scalare non è altro che il prodotto della lunghezza della proiezione di \mathbf{a} su \mathbf{b} per $|\mathbf{b}|$ oppure della proiezione di \mathbf{b} su \mathbf{a} per $|\mathbf{a}|$. Questa *biunivocità della commutatività e della proiezione* torna utile, ad esempio, con il calcolo del lavoro.

1.2.5.1 Prodotto scalare in componenti

Analizziamo prima il prodotto scalare dei versori. Un versore in prodotto scalare con se stesso, poiché $\theta = 0$, diventa:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

Invece, se si ha un versore in prodotto scalare con un altro versore (*non se stesso*), dato che $\theta = 90^\circ$, otteniamo:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0 \quad \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

Il prodotto scalare in componenti diventa quindi:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}) \cdot (b_x \hat{\mathbf{i}} + b_y \hat{\mathbf{j}} + b_z \hat{\mathbf{k}}) = \\
 &= a_x b_x \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + a_x b_y \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + a_x b_z \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \\
 &+ a_y b_x \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + a_y b_y \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + a_y b_z \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \\
 &+ a_z b_x \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + a_z b_y \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + a_z b_z \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \\
 &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

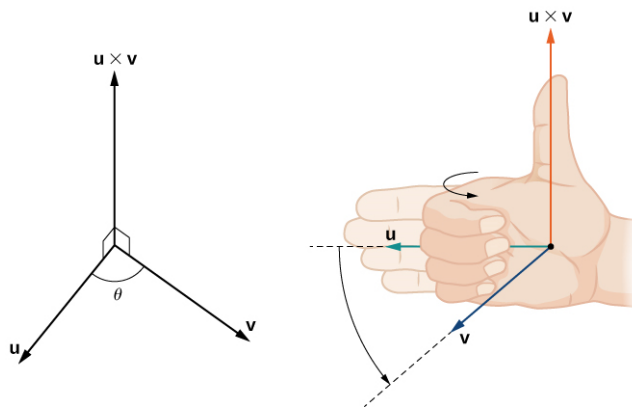
Dunque il prodotto scalare di un vettore per sè stesso diventa:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a^2 \tag{1.15}$$

1.2.6 Prodotto vettoriale

Il **prodotto vettoriale** è un'operazione che associa ad una coppia di vettori un altro vettore $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Questo vettore è caratterizzato da:

- **Direzione:** perpendicolare al piano formato da \mathbf{a} e \mathbf{b} .
- **Verso:** "Quello per cui un osservatore nel punto O di applicazione dei vettori possa vedere ruotare il vettore \mathbf{a} in senso antiorario affinché si sovrapponga al vettore \mathbf{b} ". La definizione pratica è data dalla **regola della mano destra**: si dispone la mano destra in linea col vettore \mathbf{a} e la si ruota come per portare \mathbf{a} sopra \mathbf{b} ; il pollice è teso nel verso di \mathbf{c} .
- **Modulo:** $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$



Valgono inoltre le seguenti proprietà:

- **Proprietà anticommutativa:** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- **Proprietà associativa:** $\alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b})$
- **Proprietà distributiva:** $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- **Prodotto vettoriale di uno stesso vettore:** $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = a^2 \sin 0 = 0$
- **Prodotto vettoriale di vettori perpendicolari ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$):** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin 90^\circ = ab$ (è il valore massimo dato i due moduli.)
- **Prodotto vettoriale di vettori paralleli ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$):** $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = ab \sin 0^\circ = 0$

ESEMPIO. Il vettore velocità e il vettore spostamento, legati dal prodotto vettoriale, mi danno il *momento angolare* o momento della quantità di moto. In generale, tutte le grandezze chiamate *momento* sono grandezze definite da un prodotto vettoriale.

1.2.6.1 Prodotto vettoriale in componenti

Analizziamo prima il prodotto vettoriale dei versori. Un versore in prodotto vettoriale con se stesso, poiché $\theta = 0$, diventa:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

Invece, se si ha un versore in prodotto vettoriale con un altro versore (*non* se stesso), dato che $\theta = 90^\circ$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} &= \hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} &= -\hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} &= -\hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} &= \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} &= -\hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Il prodotto vettoriale in componenti diventa quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}) \times (b_x \hat{\mathbf{i}} + b_y \hat{\mathbf{j}} + b_z \hat{\mathbf{k}}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{\mathbf{i}} - (a_x b_z - a_z b_x) \hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.16)$$

II

MECCANICA CLASSICA

CINEMATICA

“Colonnello Nunziatella: Sissignore! [al microfono] Prepararsi alla velocità luce!

Lord Casco: No, no, no, no! La velocità luce è troppo lenta!

Colonnello Nunziatella: La velocità luce è troppo lenta?!

Lord Casco: Sì! Dobbiamo passare direttamente alla velocità smodata!”

BALLE SPAZIALI

2.1 INTRODUZIONE ALLA CINEMATICA

LA CINEMATICA è il ramo della meccanica classica che si occupa di descrivere quantitativamente il **moto** dei corpi *senza* considerarne le *cause* che lo hanno generato.

Dato che descrivere il moto di un corpo esteso può diventare complesso, inizieremo dallo studio più semplice della *cinematica del punto materiale*. Un **punto materiale** è un corpo ideale che non ha un'*estensione* (oppure ha dimensioni *trascurabili* rispetto alle altre in gioco) ma a cui possiamo assegnare delle *proprietà* come massa, energia, velocità, ...

2.1.1 Tempo ed eventi

Le grandezze fondamentali in cinematica sono:

- SPAZIO PERCORSO
- VELOCITÀ
- ACCELERAZIONE
- TEMPO

Il **tempo** è la *variabile indipendente*, in funzione del quale si esprimono altre grandezze.

ATTENZIONE! Il tempo non è **mai** negativo!

Per poter parlare di moto è necessario definire anche il concetto di evento. Un **evento** è un fenomeno che accade in un *punto* dello spazio ed ad un *istante* di tempo, pertanto *spazio* e *tempo* caratterizzano un evento.

2.1.2 Sistema di riferimento

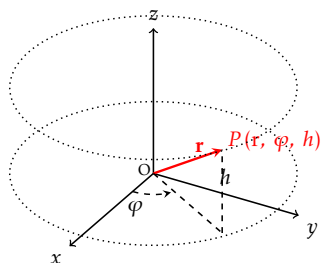
Un **sistema di riferimento** è un modello, definito nello spazio, rispetto al quale definiamo la posizione del corpo in esame, specificandone le **coordinate** rispetto all'origine di riferimento.

DIGRESSIONE. Nella meccanica relativistica spazio e tempo si fondono assieme per formare uno spazio quadridimensionale; nella meccanica classica che studiamo il tempo è una grandezza che *prescinde* dal sistema di riferimento scelto.

Abbiamo già visto in precedenza (sez. 1.2.4, pag. 8) il sistema di riferimento di coordinate **cartesiane ortogonali**. In questo sistema ogni punto P dello spazio è descritto dalle *cartesiane* x_P , y_P e z_P . Partendo dal punto P si tracciano le proiezioni agli assi del punto per trovare le cartesiane.

In alcuni casi può risultare utile usare un sistema di riferimento basato più sugli angoli, come le coordinate *cilindriche* o *polari sferiche*. Dato che il risultato di un problema deve essere *indipendente* dal sistema di riferimento scelto, esiste una corrispondenza fra i tre sistemi: di seguito daremo le leggi per esprimere le coordinate cartesiane ortogonali in funzione delle coordinate cilindriche e sferiche polari.

2.1.2.1 Coordinate cilindriche



Dato il punto $P(r, \varphi, h)$ in coordinate cilindriche, le sue coordinate cartesiane sono definite da:

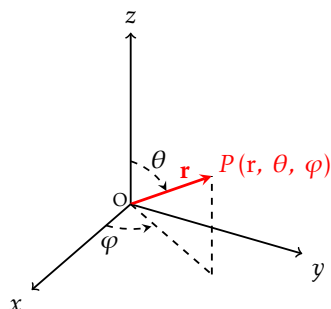
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = h \end{cases} \quad (2.1)$$

Con $0 \leq r \leq \infty$, $-\infty \leq h \leq \infty$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

φ è l'angolo formato con la proiezione di \overrightarrow{OP} su Oxy , che corrisponde al segmento r , con l'asse x .

Nel caso della cinematica, \overrightarrow{OP} è il *vettore spostamento*. Questo sistema, chiamato così dato che visivamente forma un cilindro (fissato r e facendo variare φ e h), risulta utile nello studiare i corpi rigidi e i momenti d'inerzia, nonché fenomeni fisici con simmetria rotazionale rispetto all'asse z .

2.1.2.2 Coordinate sferiche polari



Dato il punto $P(r, \theta, \varphi)$ in coordinate sferiche polari, le sue coordinate cartesiane sono definite da:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2.2)$$

Con $0 \leq |r| \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

θ è l'angolo formato fra $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ e l'asse z .

Nel caso della cinematica, \vec{r} è il *vettore spostamento*. Questo sistema, chiamato così dato che visivamente forma una sfera (fissato r e facendo variare θ e φ), come nel caso delle coordinate cilindriche risulta utile nello studiare i corpi rigidi e i momenti d'inerzia.

2.1.3 Traiettoria

La **traiettoria** è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento. In generale è una *linea curva continua*. Se la linea è chiusa, il moto è **limitato** (es. le orbite planetarie).

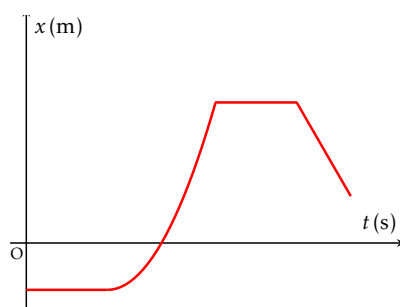
2.2 MOTO RETTILINEO

Il moto unidimensionale ci è molto utile anche per descrivere moti pluridimensionali. Infatti, la posizione di un corpo nello spazio rispetto al tempo dipendono dalla posizione $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$: queste tre componenti sono indipendenti tra loro (a patto che il tempo scorra allo stesso modo!). Lo stesso è vero per velocità e accelerazione: in tutti i casi per il risultato finale basta ricombinare alla fine i risultati.

Il **moto rettilineo** è il caso più facile da studiare di moto unidimensionale: esso si sviluppa lungo una retta con origine e verso arbitrariamente fissati.



Il suo moto può essere descritto da una sola coordinata $x(t)$, detta anche **legge oraria del moto**; essa indica anche l'insieme dei punti occupati. Sperimentalmente si può ricavare la legge oraria del moto ponendo lungo la retta dei dispositivi a fotocellula collegati al cronometro: in questo modo otteniamo delle coppie di valori x_i e t_i , con x_0 la posizione del corpo all'istante t_0 di partenza. Vogliamo da ciò cercare una relazione tra x e t , cioè la funzione $x(t)$. Il grafico di queste misure è il **diagramma orario del moto**.



- Se nel diagramma orario ho una *linea orizzontale*, la posizione **non** sta cambiando.
- Se nel diagramma orario ho una *linea che sale*, il punto si allontana dall'origine (se il tratto è sopra l'asse t) oppure si avvicina all'origine (se il tratto è sotto l'asse t).
- Se nel diagramma orario ho una *linea che scende*, il punto si avvicina all'origine (se il tratto è sopra l'asse t) oppure si allontana dall'origine (se il tratto è sotto l'asse t).

Si supponga che il punto sia nella posizione x_1 in un istante t_1 e nella posizione x_2 in un istante successivo t_2 . Indichiamo con $\Delta x = x_2 - x_1$ la **variazione di posizione** nell'**intervallo di tempo** $\Delta t = t_2 - t_1$, ovvero lo spazio percorso in Δt .

ATTENZIONE! Dato che fissiamo noi l'origine del sistema, è possibile avere una posizione negativa e quindi anche uno spostamento/variazione di posizione negativo (ad es. $x_2 < x_1$ con $x_2, x_1 > 0$): in questi casi il punto si avvicina all'origine (se il punto si trova dopo l'origine) oppure si allontana dall'origine (se il punto si trova prima l'origine).

Tuttavia, noti Δx e Δt , abbiamo solo delle informazioni generali riguardo questo intervallo: non possiamo distinguere quale sia la legge oraria. Allora, se con Δx indichiamo uno spostamento *finito*, con dx uno spostamento **infinitesimo**. La relazione fra i due è data dal concetto matematico di limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \Delta x = dx$$

Δt diventa in questo caso dt . Il vantaggio di usare queste espressioni *differenziali* è la possibilità di avere una precisa rappresentazione dei vettori e delle leggi in gioco.

2.2.1 Velocità media e istantanea

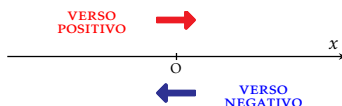
La **velocità media** è il rapporto fra lo spostamento Δx compiuto in un intervallo di tempo Δt e l'intervallo di tempo stesso.

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (2.3)$$

La *dimensione* della velocità è $[v] = [LT^{-1}]$. L'unità di misura del SI è m/s (leggasi: “metro al secondo”).

Dato che Δt , per come abbiamo definito il tempo, rimane sempre positivo, risulta evidente che v_{media} e Δx hanno lo stesso segno.

- Un valore *positivo* della velocità indica un moto verso il verso positivo del sistema di riferimento (nel disegno a lato, verso destra).
- Un valore *negativo* della velocità indica un moto verso il verso negativo del sistema di riferimento (nel disegno a lato, verso sinistra).



La velocità media è la *pendenza* $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ del segmento che nel grafico collega la posizione iniziale e quella finale: allo stesso modo dello spostamento Δx , v_{media} fornisce solo un'informazione complessiva, senza dare alcuna indicazione sulle caratteristiche del moto (non è preciso!).

Dividendo lo spostamento Δx in tanti piccoli spostamenti $(\Delta x)_1, \dots, (\Delta x)_n$ percorsi nei tempi $(\Delta t)_1, \dots, (\Delta t)_n$, le velocità $v_i = \frac{(\Delta x)_i}{(\Delta t)_i}$ sono in generali diverse da v_{media} . Considerando spostamenti infinitesimi dx , otteniamo la **velocità istantanea**, ovvero la velocità nell'istante t :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.4)$$

Per come è stata definita la velocità, essa è la *derivata* dello spazio rispetto al tempo e, in particolare, è la *tangente* alla curva di $x(t)$.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.5)$$

Da questa considerazione segue che se $v > 0$, x cresce; se $v < 0$, x decresce. Inoltre, dal tipo di curva assunta da $x(t)$ nel grafico orario possiamo già avere delle informazioni sulla velocità del corpo (senza necessariamente conoscerne la legge oraria!):

- *Curva classica (es. parabola)*: la velocità cambia.
- *Curva con pendenza costante (es. retta con $m \neq 0$)*: velocità costante.
- *Retta parallela all'asse*: assenza di moto.

2.2.1.1 Dallo spazio alla velocità, dalla velocità allo spazio

Data $x(t)$ possiamo ottenere $v(t)$ con la *derivata*, seguendo la definizione:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Data $v(t)$ possiamo ottenere $x(t)$ con l'*integrazione*. Presa la definizione di velocità, possiamo riscriverla nel seguente modo:

$$dx = v(t) dt$$

A questo punto integriamo entrambi i termini in un intervallo generico rispetto alle relative variabili, ovvero integriamo dx fra x_0 e $x(t)$, mentre $v(t) dt$ fra t_0 e t :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x(t)} dx &= \int_{t_0}^t v(t) dt \\ x(t) - x_0 &= \int_{t_0}^t v(t) dt \\ x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

In sostanza, dato il grafico della velocità rispetto al tempo, l'area sottesa al grafico $v(t)$ risulta essere lo spazio percorso.

2.2.2 Accelerazione media e istantanea

L'**accelerazione media** è il rapporto tra la variazione di velocità Δv in un dato intervallo di tempo Δt e l'intervallo di tempo stesso.

$$a_{media} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (2.7)$$

La *dimensione* dell'accelerazione è $[a] = [LT^{-2}]$. L'unità di misura del SI è m/s^2 (leggasi: "metro al secondo quadrato").

Se $a > 0$, v cresce; se $a < 0$ (**decelerazione**), v decresce. Allo stesso modo della velocità istantanea, definiamo l'**accelerazione istantanea** come la derivata della velocità rispetto al tempo e pertanto come la *derivata seconda* dello spostamento rispetto al tempo.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (2.8)$$

2.2.2.1 Dallo spazio all'accelerazione, dalla accelerazione allo spazio

Data $x(t)$ possiamo ottenere $a(t)$ con la *derivata seconda*, seguendo la definizione:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Data $a(t)$ possiamo ottenere $x(t)$ con una doppia *integrazione*. Presa la definizione di accelerazione, possiamo riscriverla nel seguente modo:

$$dv = a(t) dt$$

A questo punto integriamo entrambi i termini in un intervallo generico rispetto alle relative variabili, ovvero integriamo dv fra v_0 e $v(t)$, mentre $a(t)dt$ fra t_0 e t :

$$\begin{aligned}\int_{v_0}^{v(t)} dv &= \int_{t_0}^t a(t) dt \\ v(t) - v_0 &= \int_{t_0}^t a(t) dt \\ v(t) &= v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt\end{aligned}\quad (2.9)$$

In sostanza, dato il grafico dell'accelerazione rispetto al tempo, l'area sottesa al grafico $v(t)$ risulta essere la velocità.

Ponendo $v(t) = \frac{dx}{dt}$, integriamo nuovamente (si veda sez. 2.2.1.1, pag. 19):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt \\ dx &= \left[v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt \right] dt \\ \int_{x_0}^{x(t)} dx &= \int_{t_0}^t \left[v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt \right] dt \\ x(t) - x_0 &= \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t a(t) dt \right] dt \\ x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t a(t) dt \right] dt\end{aligned}\quad (2.10)$$

2.2.3 Moto rettilineo uniforme

In un **moto rettilineo uniforme** si ha $v(t) = v_0$ costante, quindi $a(t) = 0$. Allora l'integrale della legge oraria diventa:

$$\begin{aligned}x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt &\implies x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) \\ v_0 &= \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} = v_{media}\end{aligned}$$

Ponendo $t_0 = 0$, le leggi che ne descrivono il moto sono:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t \\ v(t) = v_0 \\ a(t) = 0 \end{cases}\quad (2.11)$$

2.2.4 Moto uniformemente accelerato

In un **moto uniformemente accelerato** si ha $a(t) = a_0$ costante; l'integrale che mi dà la velocità diventa:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a_0 dt \implies v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

Con l'integrazione successiva otteniamo

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t a_0(t - t_0) dt$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + a_0 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} - t_0(t - t_0) \right]$$

Ponendo $t_0 = 0$, le leggi che ne descrivono il moto sono:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + a_0 \frac{t^2}{2} \\ v(t) = v_0 + a_0 t \\ a(t) = a_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Vediamo con la legge oraria del moto uniformemente accelerato di legare direttamente x a v . Da $v(t) = v_0 + a_0 t$ ricaviamo t :

$$t = \frac{v(t) - v_0}{a_0}$$

Sostituiamo nella legge oraria:

$$x(t) = x_0 + v_0 \left[\frac{v(t) - v_0}{a_0} \right] + \frac{1}{2} a_0 \left[\frac{(v(t) - v_0)^2}{(a_0)^2} \right]$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0 v(t)}{a_0} - \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{1}{2} \left[\frac{v^2(t) - 2v(t)v_0 + v_0^2}{a_0} \right]$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0 v(t)}{a_0} - \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{v^2(t)}{a_0} - \frac{v_0 v(t)}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_0}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2} \frac{v^2(t)}{a_0} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_0}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2a_0} [v^2(t) - v_0^2] \quad (2.13)$$

In alternativa:

$$v^2(t) = v_0^2 + 2a_0[x(t) - x_0] \quad (2.14)$$

In modo analogo possiamo legare l'accelerazione direttamente alla velocità. Dalla definizione di accelerazione come derivata della velocità:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv[x(t)]}{dt} = \frac{dv}{dx} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v} = v \frac{dv}{dx} \implies a dx = v dv$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} a dx = \int_{v_0}^{v(t)} v dv \implies \int_{x_0}^{x(t)} a dx = \frac{1}{2} v^2(t) - \frac{1}{2} v_0^2$$

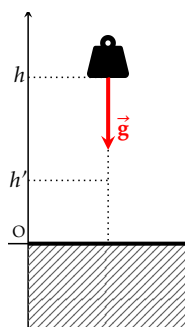
Nel caso $a(t) = a_0$ otteniamo:

$$a_0(x(t) - x_0) = \frac{1}{2} v^2(t) - \frac{1}{2} v_0^2$$

Il che è analogo a quello visto precedentemente.

2.3 MOTO VERTICALE: CADUTA DI UN GRAVE O MOTO IN CADUTA LIBERA

La **caduta di un grave** è un caso classico di moto uniformemente accelerato. *Trascurando la resistenza dell'aria*, un corpo lasciato cadere libero vicino alla superficie terrestre ha un moto uniformemente accelerato.



g è l'**accelerazione di gravità**, un'accelerazione costante che deriva dall'attrazione gravitazionale del corpo da parte del pianeta:

- g *dipende* dal pianeta in esame.
- Se il volume in cui operiamo non è limitato:
 - ◇ g *dipende* dalla quota.
 - ◇ g *dipende* dalla latitudine (è maggiore ai poli e minore all'equatore a causa della distanza diversa dal centro del pianeta).
- g **non** dipende dal tempo (è costante).
- g **non** dipende dalla posizione del corpo *se* operiamo all'interno di un volume limitato.
- g **non** dipende dalla forma dei corpi o dalla loro natura (es. la loro massa).

ATTENZIONE! La questione del segno: nel sistema di riferimento di sopra il corpo scenderà a partire da una certa altezza h . Preso un istante successivo, il corpo si troverà ad altezza $h' < h$. Poiché sappiamo che la velocità ha segno concorde con la variazione dello spostamento, il corpo scende con velocità avente verso opposto al verso con cui aumenta la posizione (considerando anche l'influenza del termine g).

In termini di vettori, la posizione ha segno positivo nel salire e la velocità cresce nel verso opposto. L'accelerazione ha segno negativo.

Lascio cadere da fermo ($v_0 = 0$) il corpo dall'altezza h nell'istante $t = t_0$. Allora la legge oraria diventa:

$$\begin{cases} y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = -gt \end{cases} \quad (2.15)$$

Dunque, per raggiungere il suolo, ovvero $y_F = 0 = y(t)$, il tempo impiegato è:

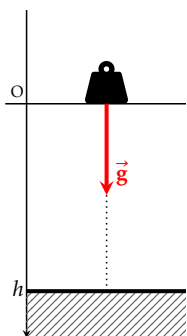
$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.16)$$

La velocità al suolo è pari a:

$$v(t) = -gt = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} \quad (2.17)$$

Se il sistema avesse l'origine con la posizione di partenza dell'oggetto, la sua posizione, velocità e accelerazione hanno tutti lo stesso verso. Le leggi viste in precedenza diventano:



$$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = gt \end{cases} \quad (2.18)$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \implies t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.19)$$

$$v(t) = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} \quad (2.20)$$

ATTENZIONE! Come possiamo vedere, le formule dipendono dal sistema di riferimento, pertanto bisogna fare attenzione in quale stiamo operando.

Se consideriamo anche una velocità iniziale v_0 , le leggi del moto diventano (tenendo conto sempre di $t_0 = 0$ e di operare nel sistema di riferimento con origine al suolo):

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = v_0 - gt \end{cases} \quad (2.21)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \quad (2.22)$$

2.4 MOTO PERIODICO

Un **moto periodico** è un moto tale che ad intervalli di tempo uguali la particella torna a passare nella stessa posizione con la stessa velocità e la stessa accelerazione.

ESEMPLI.

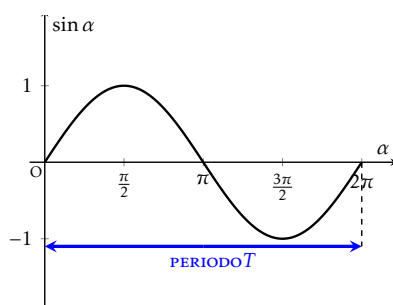
- Una pallina che cade verticalmente e rimbalza in modo perfettamente elastico è un moto periodico unidimensionale.
- Una biglia che rimbalza perpendicolarmente fra le sponde del biliardo è un moto periodico unidimensionale.
- Il moto di un peso che oscilla attaccato ad una molla è periodico.
- Un moto circolare è un moto periodico bidimensionale.

2.4.1 Moto armonico semplice

Il **moto armonico semplice** è un particolare tipo di moto periodico che si sviluppa lungo un asse rettilineo. La sua *legge oraria* descrive una funzione sinusoidale:

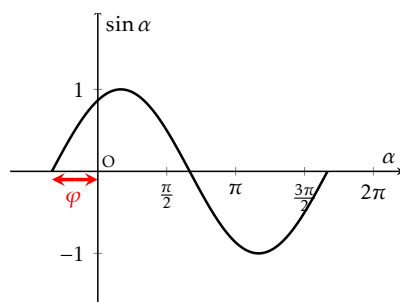
$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.23)$$

Disegniamo per capire meglio il grafico di un generico $\sin \alpha$.



Nella legge oraria qui sopra $\alpha = \omega t + \varphi$.

φ è la **fase**, il valore assunto dall'argomento α in $t = 0$ ($\varphi = \alpha(0)$). Nel caso di $\sin \alpha$ generico $\varphi = 0$, quindi $\alpha = \omega t$.



Notiamo come la funzione si ripete esattamente uguale dopo 2π . Per avere $\alpha = 2\pi$ ci serve un tempo T , che chiamiamo **periodo** tale per cui $2\pi = \omega T$, ovvero:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.24)$$

ω è la **pulsazione**: se aumenta la pulsazione diminuisce il periodo e viceversa. La sua *dimensione* è $[\omega] = [T^{-1}]$; l'unità di misura del SI è rad/s (leggasi: “radiante al secondo”). A è l'**ampiezza** dell'oscillazione e corrisponde ai limiti dell'oscillazione, pertanto la *dimensione* dell'ampiezza è $[a] = [L]$, una lunghezza. L'ampiezza dell'intervallo, poiché $\sin(\omega t + \varphi)$ varia fra -1 e 1 , è pari a $2A$ centrato nell'origine del sistema di riferimento. Pertanto, nell'istante $t = 0$ $x(0) = A \sin \varphi$. A e φ definiscono la posizione iniziale del tempo. Il numero di oscillazioni al secondo è detta **frequenza**:

$$f = \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.25)$$

La *dimensione* della frequenza è $[f] = [T^{-1}]$. L'unità di misura del SI è Hz (leggasi: “hertz”) o s^{-1} (leggasi: “secondi alla meno uno”).

ATTENZIONE! Il periodo e la frequenza sono indipendenti dall'ampiezza del moto.

2.4.1.1 Velocità e accelerazione

La **velocità**, secondo la definizione, è:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.26)$$

La *dimensione* della velocità rispecchia quella già vista della velocità: $[v] = [a][\omega] = [LT^{-1}]$. L'**accelerazione**, secondo la definizione, è:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.27)$$

La *dimensione* dell'accelerazione rispecchia quella dell'accelerazione vista a noi: $[a] = [a][\omega^2] = [LT^{-2}]$. Notiamo che, essendo $A \sin(\omega t + \varphi) = x(t)$, l'accelerazione si può riscrivere come:

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \quad (2.28)$$

L'accelerazione è *proporzionale e opposta* allo spostamento: questo *caratterizza* i moti armonici. Basta dunque trovare in un sistema questa relazione tra $x(t)$ e $a(t)$ per affermare che si tratti di moto armonico. In termini differenziali:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \quad (2.29)$$

Questa equazione differenziale di secondo grado nella posizione è condizione necessaria e sufficiente per affermare si tratti di moto armonico.

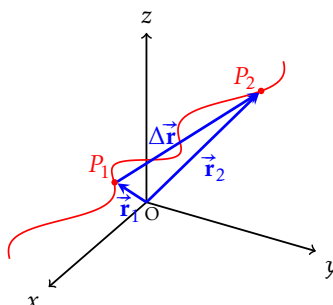
2.4.1.2 Velocità e accelerazione in funzione della posizione

Dalla legge vista in precedenza $a = -\omega^2 x$ possiamo ricavare la velocità in funzione della posizione attraverso un processo di integrazione:

$$\begin{aligned} a &= -\omega^2 x \\ \int_{x_0}^x a dx &= -\omega^2 \int_{x_0}^x x dx \\ \frac{1}{2}v^2(t) - \frac{1}{2}v_0^2 &= -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 - x_0^2) \\ v^2(t) - v_0^2 &= \omega^2(x_0^2 - x^2) \\ v^2 &= v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2) \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.5 MOTO IN DUE E IN TRE DIMENSIONI

Si consideri un corpo puntiforme che si muove percorrendo una *curva* nello spazio come in figura.



All'istante t_1 il corpo si trova in P_1 , all'istante t_2 in P_2 . Possiamo vedere come per ogni punto basta un solo vettore ($r_1 = \overrightarrow{OP_1}$ ed $r_2 = \overrightarrow{OP_2}$, rispettivamente per P_1 e P_2) per identificarlo. Questi due vettori sono *vettori posizioni* o, per essere precisi, sono i valori che il generico **vettore posizione** $\vec{r}(t)$ assume ad un certo istante di tempo. Possiamo ovviamente scomporre il vettore nelle coordinate cartesiane:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (2.31)$$

In generale, per descrivere il vettore posizione basta avere tre coordinate (indipendenti una dall'altra) che me lo descrivano; ad esempio, in coordinate polari:

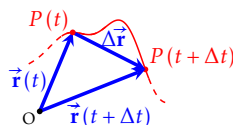
$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = \begin{cases} x = x(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad (2.32)$$

OSSERVAZIONE. La legge oraria nel moto in due e in tre dimensioni è equivalente a tre equazioni scalari. Poiché esse descrivono anche la traiettoria del punto, esse sono **equazioni parametriche** della traiettoria in funzione del tempo.

2.5.1 Velocità in due o tre dimensioni

Come abbiamo già visto, la velocità è un vettore legato direttamente alla posizione in quanto variazione spaziale su un tempo. In questo caso la variazione dello spostamento è, di fatti, un vettore a sua volta, il **vettore spostamento** o *raggio vettore*:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.33)$$



ATTENZIONE! L'incremento del raggio vettore $\Delta\vec{r}$ è in genere diverso dallo spazio effettuato Δs . Ad esempio, in un'orbita chiusa il punto di partenza e di fine coincidono, pertanto il raggio vettore non cambia ($\Delta\vec{r} = 0$) ma ha percorso quest'orbita a tutti gli effetti ($\Delta s \neq 0$), dunque $\Delta\vec{r} \neq \Delta s$.

Poiché lo spostamento è un vettore, il **vettore velocità media** è il rapporto fra il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ e la variazione di tempo Δt :

$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \quad (2.34)$$

Come abbiamo fatto per lo studio dei moti unidimensionali, possiamo ragionare con i limiti per trovare il **vettore velocità istantanea**; il vettore velocità istantanea non è altro che la derivata del raggio vettore rispetto al tempo:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \text{ con } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.35)$$

In questo modo possiamo risolvere il problema di $\Delta\vec{r} \neq \Delta s$ enunciato prima. Infatti, $d\vec{r}$ risulta essere:

- In *direzione tangenziale* alla traiettoria nel punto P
- In *modulo* pari allo spostamento infinitesimo ds lungo la traiettoria

In sostanza $d\vec{r} = d\vec{s}$ o, con i versori $d\vec{r} = ds\hat{u}_T$, indicando con \hat{u}_T il *versore della tangente alla curva* o **tangenziale**. La velocità, espressa con il versore tangenziale, diventa:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T \quad (2.36)$$

2.5.2 Velocità in due in componenti

Vogliamo esprimere la velocità in componenti. Prendiamo ora il caso bidimensionale, più facile da analizzare.

Il nostro vettore spostamento $d\vec{r}$ può essere scomposto nelle componenti $d\vec{x}$ e $d\vec{y}$:

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

La velocità, per definizione, risulta:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx\hat{i} + dy\hat{j}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Il vettore \vec{v} può essere quindi scomposto nei vettori $\vec{v}_x = \frac{dx}{dt}\hat{i}$ e $\vec{v}_y = \frac{dy}{dt}\hat{j}$. Seguono le formule già viste in precedenza con la scomposizione in componenti (1.2.4, 8):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

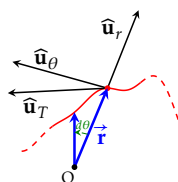
OSSERVAZIONE. Dato che il versore per definizione è un vettore di modulo unitario, in un tempo Δt (e quindi anche in un dt) può solo variare la sua direzione, cioè varia di un angolo $\Delta\theta$ (o $d\theta$):

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u} \quad (2.37)$$

Più interessante è studiare il problema della scomposizione in componenti con le coordinate polari. Introduciamo:

- \hat{u}_r : versore **parallelo** alla direzione del raggio vettore \vec{r} e verso *uscente* dall'origine.
- \hat{u}_θ : versore **perpendicolare** al raggio vettore \vec{r}

\vec{r} può essere espresso come $\vec{r} = r\hat{u}_r$.



DIGRESSIONE. In che modo varia un vettore? O cambia modulo, o cambia direzione, oppure una combinazione delle due. La velocità, che è la variazione di \vec{r} rispetto al tempo, deve tenere conto di queste due possibilità.

In uno spazio cartesiano possiamo sempre scomporre in direzione x , y e z . Nel sistema polare abbiamo un metodo peculiare per scomporlo, che segue la nota della digressione di sopra.

Quando un punto compie uno spostamento, la variazione del raggio vettore è una **corda** della curva, mentre il tratto scelto rappresenta lo spostamento. A livello infinitesimo, non abbiamo *alcuna distinzione* fra la corda della variazione del raggio vettore e la curva in sé: anzi, il punto funzionalmente percorre un **arco di circonferenza!**

Dunque, questo spostamento-variazione del raggio vettore può essere espresso da:

$$d\mathbf{r} = ds = r d\theta \quad (2.38)$$

La velocità, nel sistema polare, si può esprimere nel seguente modo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{dt} \hat{u}_r}_{\substack{\text{Variazione} \\ \text{del modulo} \\ \text{(senza var.} \\ \text{della dir.)}}} + r \underbrace{\frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta}_{\substack{\text{Variazione} \\ \text{dell'angolo} \\ \text{(senza var.} \\ \text{del modulo)}}} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \quad (2.39)$$

Con \vec{v}_r la **velocità radiale** e \vec{v}_θ la **velocità tangenziale**.

2.5.3 Accelerazione in due o tre dimensioni

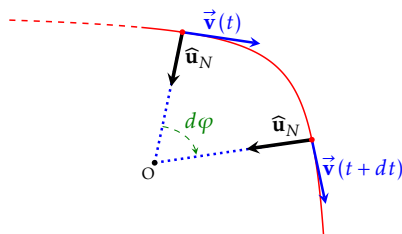
A livello pratico, lo studio dell'accelerazione è del tutto analogo a quello visto in precedenza, con l'accortezza di considerare i vettori velocità.

Definito il **vettore variazione di velocità**:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (2.40)$$

Il **vettore accelerazione media** è il rapporto fra il vettore variazione di velocità $\Delta \vec{v}$ e la variazione di tempo Δt :

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \quad (2.41)$$



Studiamo ora il caso infinitesimo. Il vettore velocità, che è tangente alla traiettoria, può essere variato di modulo ma sicuramente ha subito un cambio di direzione. La velocità, essendo di natura un vettore tangenziale, può essere scritto come:

$$\vec{v} = v(t) \hat{u}_T(t)$$

Ricaviamo l'accelerazione come derivata prima della velocità rispetto al tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + v \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

Definiamo il **versore normale** $\hat{\mathbf{u}}_N$ il versore ortogonale a $\hat{\mathbf{u}}_T$ verso la concavità della traiettoria.

Presi i vettori velocità $\vec{\mathbf{v}}(t)$ e $\vec{\mathbf{v}}(t+dt)$, notiamo che fra i corrispettivi $\hat{\mathbf{u}}_N$ abbiamo una variazione d'angolo $d\varphi$ e lo stesso si ha per $\hat{\mathbf{u}}_T$. La differenza fra questi $\hat{\mathbf{u}}_T$ ha la direzione di $\hat{\mathbf{u}}_N$. Inoltre, poiché la variazione $d\hat{\mathbf{u}}_T$ è, come già visto con lo spostamento, l'arco definito da $d\varphi$, ovvero $ds = r d\varphi$; con $ds = d\hat{\mathbf{u}}_T$ e $r = |\hat{\mathbf{u}}_T| = 1$, si ha:

$$d\hat{\mathbf{u}}_T = d\varphi$$

La variazione di $\hat{\mathbf{u}}_T$, rispetto a dt , è:

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{\mathbf{u}}_N$$

L'accelerazione diventa:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{u}}_T + v \frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{u}}_T}_{\text{Parallela a } v} + \underbrace{v \frac{d\varphi}{dt} \hat{\mathbf{u}}_N}_{\text{Perpendicolare a } v} = \vec{\mathbf{a}}_T + \vec{\mathbf{a}}_N$$

Con $\vec{\mathbf{a}}_T$ l'**accelerazione tangenziale** e $\vec{\mathbf{a}}_N$ la **accelerazione centripeta**.

A livello infinitesimale abbiamo detto che lo spostamento infinitesimale è $ds = r d\varphi$, con r il raggio della circonferenza tangenziale in quel punto. Riscrivendo:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}$$

Sapendo che $dv = \frac{ds}{dt}$, possiamo riscrivere il termine $v \frac{d\varphi}{dt}$ dell'accelerazione centripeta facendo un cambio di variabile: $v \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt}$. Ma allora:

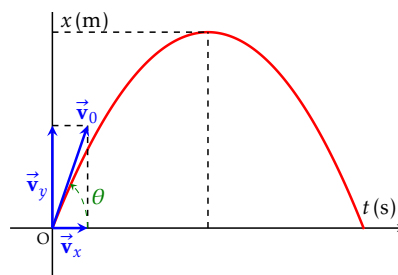
$$\vec{\mathbf{a}}_N = v \frac{d\varphi}{dt} \hat{\mathbf{u}}_N = v \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \hat{\mathbf{u}}_N = v \frac{1}{r} v \hat{\mathbf{u}}_N = \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{u}}_N$$

E quindi:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{u}}_T + \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{u}}_N = \vec{\mathbf{a}}_T + \vec{\mathbf{a}}_N \quad (2.42)$$

2.6 MOTO PARABOLICO

Supponiamo di avere un corpo lanciato con velocità iniziale $\vec{\mathbf{v}}_0$ ad un angolo θ rispetto all'asse x . Su di esso agisce l'accelerazione di gravità che, espressa in versori, risulta $\vec{\mathbf{g}} = -g\hat{\mathbf{j}}$.



Scomponiamo il moto lungo le due componenti:

$$\underbrace{\begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = v_0 \cos \theta \end{cases}}_{\text{moto rett. uniforme}} \quad \underbrace{\begin{cases} a_y = -g \\ v_y = v_0 \sin \theta - gt \end{cases}}_{\text{moto unifor. accelerato}} \quad (2.43)$$

Le due leggi orarie le ricaviamo per integrazione dalla velocità:

$$\begin{cases} x(t) = \int v(t) dt = \int [v_0 \cos \theta] dt = v_0 \cos \theta t \\ y(t) = \int v(t) dt = \int [v_0 \sin \theta - gt] dt = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \theta t \\ y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (2.44)$$

Abbiamo trovato delle equazioni parametriche in t . Per trovare la *traiettoria* del moto, ovvero $y(x)$, ricaviamo la variabile del tempo t da $x(t)$ e sostituiamo nell'equazione di $y(t)$:

$$x(t) = v_0 \cos \theta t \Rightarrow t = \frac{x(t)}{v_0 \cos \theta}$$

$$y = y(x) = v_0 \sin \theta \frac{x(t)}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2}g \frac{x^2(t)}{(v_0 \cos \theta)^2}$$

$$y(x) = \tan \theta x - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{(v_0 \cos \theta)^2} \quad (2.45)$$

La traiettoria dunque è una *parabola* rivolta verso il basso e passante per l'origine del sistema di riferimento: questo tipo di moto è detto **moto parabolico**. Poiché la velocità è tangente alla traiettoria, nel massimo della parabola abbiamo la velocità nulla.

OSSERVAZIONE. La traiettoria, essendo una parabola, è del tutto simmetrica: molte questioni possono essere risolte più facilmente sapendo questo.

La distanza lungo l'asse x fra il punto di arrivo e il punto di partenza è la **gittata**. Per trovare il valore della gittata ci basta porre $y(x) = 0$ e prendere il risultato diverso da zero:

$$y(x) = 0 \Rightarrow \tan \theta x - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{(v_0 \cos \theta)^2} = 0 \Rightarrow \tan \theta - \frac{1}{2}g \frac{x}{(v_0 \cos \theta)^2} = 0$$

$$\text{gitt} = \frac{2 \tan \theta v_0^2 \cos^2 \theta}{g} = \frac{2 \sin \theta v_0^2 \cancel{\cos^2 \theta}}{g \cancel{\cos \theta}}$$

$$\text{gitt} = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) \quad (2.46)$$

DIGRESSIONE. Se dovessimo considerare la gittata in presenza di attriti dell'aria, che sono *attriti viscosi* (sez. 3.6.4.2, pag. 44), avremmo una distanza minore rispetto a quella trovata precedentemente, che riteniamo essere senza attriti dell'aria. Se facessimo l'esperimento sulla Luna, non essendoci attriti dell'aria, otterremo il valore massimo (considerando ovviamente l'accelerazione di gravità lunare).

Possiamo trovare l'**altezza massima** del lancio in due modi. Può essere visto cercando il punto in cui la derivata di $y(x)$ si annulla.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \tan \theta - g \frac{x}{(v_0 \cos \theta)^2} = 0$$

Troviamo quindi x_M , che è la distanza dall'origine dell'altezza massima:

$$x_M = \tan \theta \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} = \frac{\sin \theta v_0^2 \cos^2 \theta}{g \cos \theta} = \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta$$

Usando invece la gittata, per simmetria delle traiettoria il picco lo si ha a metà strada, perciò:

$$x_M = \frac{\text{gitt}}{2} = \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta \quad (2.47)$$

L'altezza massima è $y(x_M)$:

$$y_{max} = y(x_M) = \tan \theta \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2g} \frac{v_0^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{v_0^2 \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \theta$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (2.48)$$

Il massimo ha coordinate $\left(\frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta, v_0^2 \sin^2 \theta \right)$.

OSSERVAZIONE. Data un certa velocità in modulo v_0 , il valore massimo di x_M lo abbiamo quando $\sin(2\theta) = 1$, ovvero quando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2.6.1 Accenni di velocità di fuga

Data la Terra, supponiamo di lanciare orizzontalmente da una montagna un proiettile con velocità v_0 .



La posizione iniziale non è l'origine del sistema di riferimento: possiamo immaginare di trovare nel picco della traiettoria studiata nella sezione precedente. In termini del tutto teorici, quando il mio proiettile *non* atterra ma gira il pianeta e torna indietro a colpirmi? Che velocità devo avere per farlo?

Partendo da $x_M = \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta$, riscriviamo il tutto come $v_0^2 \sin \theta \cos \theta = x_M g$. Notiamo che $\sqrt{\sin \theta \cos \theta}$ è una quantità abbastanza piccola, dunque possiamo trovare una velocità iniziale approssimativa applicando la radice quadrata ad entrambi i termini:

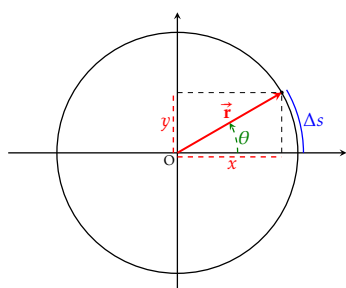
$$v \approx \sqrt{v_0^2 \sin \theta \cos \theta} = v_0 \sqrt{\sin \theta \cos \theta} = \sqrt{g x_M}$$

Per superare la Terra il proiettile dovrà almeno percorrere in orizzontale la distanza del raggio terrestre. Dunque, posto $x_M = R$:

$$v \approx \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \text{ m/s}^2 \times 6,6 \cdot 10^6 \text{ m}} \approx 28000 \text{ km/h} \quad (2.49)$$

Questa velocità, chiamata **prima velocità cosmica**, è necessaria per andare in orbita.

2.7 MOTO CIRCOLARE



In un **moto circolare** un punto P percorre una traiettoria circolare, ovvero il modulo del raggio vettore \vec{r} è costante.

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{cost} \quad (2.50)$$

$$\text{con } x = |\vec{r}| \cos \theta \quad y = |\vec{r}| \sin \theta \quad (2.51)$$

Come si semplificano le leggi precedenti?

2.7.1 Moto circolare uniforme

Seppur il modulo della velocità rimanga costante, il vettore velocità cambia direzione e quindi *non* è costante. Dunque l'accelerazione *non* è nulla.

La legge dell'accelerazione in due dimensioni ci dice:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{r} \hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Tuttavia \vec{a}_T dipende dalla variazione di modulo; essendo il modulo costante essa sarà nulla. \vec{a}_N dipende dalla variazione di direzione, pertanto è sempre diversa da zero. Dunque:

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{r} \hat{u}_N$$

Il moto circolare uniforme è un moto accelerato con **accelerazione costante ortogonale** alla traiettoria.

Possiamo descrivere il moto circolare uniforme come un particolare moto periodico. Infatti, fissato un punto di partenza, il punto ritornerà all'origine dopo un **periodo** (o *periodo di rivoluzione*) T , calcolabile come:

$$T = \frac{\text{spazio di un giro}}{\text{velocità}} = \frac{2\pi r}{v} \quad (2.52)$$

Mentre il vettore velocità gira assieme al punto, l'angolo θ fra \vec{r} varia e l'asse x . Definiamo la **velocità angolare**:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.53)$$

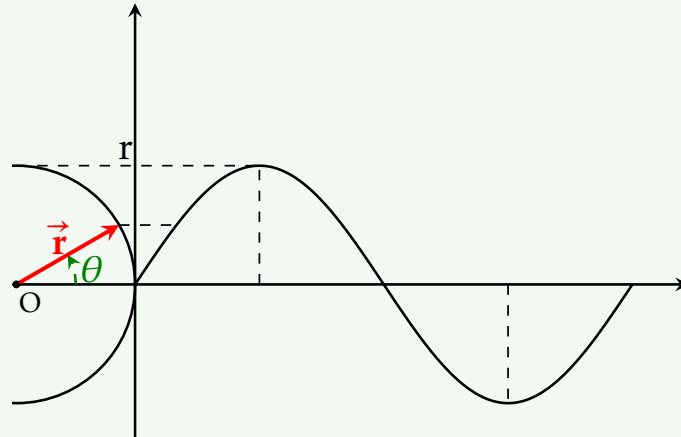
Dalla distanza percorsa $ds = r d\theta$ possiamo ricavarci $d\theta = \frac{1}{r} ds$. Segue che:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{r} \quad (2.54)$$

Ma allora $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$.

DIGRESSIONE. Nel moto armonico ω è la pulsazione, nel moto circolare ω è chiamata velocità angolare. C'è differenza?

La pulsazione è un concetto più generale; nel caso specifico del moto circolare diventa la velocità angolare. Infatti, tracciando la posizione di \vec{y} rispetto al tempo vediamo bene ciò.



Possiamo ridefinire l'accelerazione in funzione della velocità angolare:

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{r} \hat{u}_N = \frac{\omega^2 r^2}{r} \hat{u}_N = \omega^2 r \hat{u}_N \quad (2.55)$$

2.7.2 Moto circolare non uniforme

In questo caso di moto circolare la velocità cambia anche in modulo, quindi:

- L'accelerazione tangenziale *non* è nulla.
- L'accelerazione centripeta *non* è costante, perché varia il modulo di \vec{v} .

Inoltre varia anche la velocità angolare ω , dunque possiamo definire l'**accelerazione angolare**:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(v/r)}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{r} \quad (2.56)$$

Se α è costante, con l'integrazione ricaviamo $\omega(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d\omega}{dt} \implies d\omega = \alpha dt \\ \int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega &= \int_{t_0}^t \alpha dt \quad \omega(t) - \omega_0 = \alpha(t - t_0) \\ \omega(t) &= \omega_0 + \alpha(t - t_0) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Integrando ulteriormente ottengo $\theta(t)$:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{d\theta}{dt} \implies d\theta = \omega(t) dt \\ \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta &= \int_{t_0}^t \omega(t) dt \quad \theta(t) - \theta_0 = \int_{t_0}^t [\omega_0 + \alpha(t - t_0)] dt \end{aligned}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \alpha \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} - t_0(t - t_0) \right] \quad (2.58)$$

Nel caso t_0 si ha:

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \end{cases} \quad (2.59)$$

2.7.2.1 Notazione vettoriale

DIGRESSIONE. Possiamo definire la velocità angolare anche come il vettore $\vec{\omega}$, con modulo $\frac{d\theta}{dt}$ perpendicolare al piano della circonferenza percorsa e verso tale che il moto appaia in verso antiorario; il punto di applicazione è nel centro della circonferenza.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.60)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.61)$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.62)$$

DINAMICA I: FORZE

‘Non sottovalutare la Forza.’

DARTH FENER, *professore di Fisica I.*

3.1 INTRODUZIONE ALLA DINAMICA

LA DINAMICA è il ramo della meccanica che studia gli **effetti** che l'**applicazione** di una forza produce sul moto di un oggetto o, più in generale, le interazioni del corpo con l'ambiente. Come abbiamo fatto per la cinematica, per ora studieremo la dinamica del punto materiale.

3.2 FORZA

La **forza** è una grandezza vettoriale che rappresenta la causa che modifica le condizioni di moto di un corpo.

- Un corpo in quiete sotto azione di una forza si mette in moto.
- Una forza applicata ad un corpo in movimento ne cambia il moto (direzione, accelerazione, velocità, ecc...).

Applicate ad un corpo ci possono essere *più di una* forza: si sovrappongono gli effetti e l'effetto complessivo può essere visto come *somma dei singoli effetti* oppure come *effetto della somma* (vettoriale) delle forze:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{ris} \quad (3.1)$$

La forza, modificando il moto, va a variare direttamente la velocità di un corpo, pertanto esiste un forte legame con l'*accelerazione*.

3.2.1 Massa e forza

Il concetto di **massa** nasce dal confronto fra causa ed effetto. Si potrebbe affermare che la massa misura la *resistenza* che un corpo oppone a cambiare il suo stato di moto (nel senso

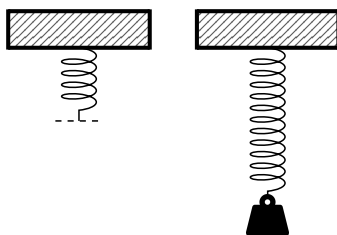
comune, più un oggetto è “massiccio”, più forza occorre per spostarlo).

Il rapporto tra causa ed effetto è indipendente da dove ci troviamo nell’universo e dall’osservatore; inoltre, vale sia per corpi subatomici, sia per corpi di dimensioni planetarie. La massa è una proprietà **intrinseca** del corpo che *non* cambia col sistema di riferimento.

La massa di cui parliamo è la **massa inerziale**, dato che è l’**inerzia** del corpo a variare il proprio stato di moto. Nel SI ha come unità di misura il kg (leggasi: “chilogrammo”).

3.2.2 Il dinamometro

Lo *strumento* per misurare le forze è il **dinamometro**. Esso è sostanzialmente una molla di cui sappiamo la lunghezza a riposo e l’allungamento che subisce con appesa una massa campione. Una molla allungata esercita una *forza di richiamo* che, entro certi *limiti* di estensione rispetto alla *posizione di equilibrio*, è proporzionale all’allungamento stesso. Grazie a ciò, se applichiamo una forza all’estremo della molla e annotiamo l’allungamento, confrontandolo con l’allungamento fatto dalla massa campione, possiamo misurare la forza esercitata.



3.3 I TRE PRINCIPI DELLA DINAMICA

3.3.1 Primo principio o principio di inerzia

“Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero mantiene il suo stato di quiete (se era originalmente in quiete) oppure mantiene il suo moto rettilineo uniforme”

Da questo principio sappiamo che la condizione di *quiete e moto rettilineo uniforme* sono dinamicamente equivalenti: dipendono dal sistema di riferimento in cui si osserva il fenomeno. Infatti, un oggetto in quiete diventa in moto se osserviamo da un sistema di riferimento in movimento con velocità costante.

Definiamo quindi i **sistemi inerziali** quei sistemi in cui il vettore velocità *non* cambia modulo e direzione (es. *non* il moto circolare).

3.3.2 Secondo principio o legge di Newton

Newton scoprì che la forza, la massa del corpo e l’accelerazione sono strettamente legati in modo in quantitativo dall’omonima **legge di Newton**:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (3.2)$$

La *dimensione* della forza è $[F] = [MLT^{-2}]$. L’unità di misura del SI è N (leggasi: “newton”). Una forza di 1 N significa imprimere ad un corpo da 1 kg un’accelerazione di 1 m/s².

Se applichiamo lo stesso sistema di forze a masse diverse, notiamo che subiscono accelerazioni diverse. Vediamo che vale il seguente rapporto:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

Il primo principio della dinamica può essere anche visto come un caso particolare delle leggi di Newton. Infatti, se non ci sono forze ($\vec{F} = 0$) segue che il corpo non è soggetto ad un'accelerazione ($\vec{a} = 0$) e quindi il corpo o è fermo oppure si muove con velocità costante.

ATTENZIONE! La legge di Newton (così come l'abbiamo vista) è valida solamente in sistemi di **riferimenti inerziali**. In un sistema di riferimento che accelera rispetto al corpo, anche con forza risultante nulla il corpo sarebbe comunque visto muoversi di moto accelerato, subendo un'accelerazione *apparente* a cui non corrisponde alcuna forza. Nel fare gli esperimenti dobbiamo avere l'accortezza di *non* muoverci di moto accelerato per non falsare i risultati.

3.3.2.1 Decomposizione delle forze

Essendo grandezze vettoriali, le forze possono essere separate in componenti da due punti di vista diversi. Una forza, data la legge di Newton, può essere scomposta in base alle componenti dell'accelerazione.

$$\begin{cases} \vec{F}_x = m\vec{a}_x \\ \vec{F}_y = m\vec{a}_y \\ \vec{F}_z = m\vec{a}_z \end{cases} \quad (3.3)$$

Se stiamo trattando la forza come risultante di forze, possiamo anche vedere ogni componente cartesiana come la somma delle componenti lungo quell'asse delle varie forze in gioco:

$$\begin{cases} \vec{F}_x = \sum_i \vec{F}_{x,i} \\ \vec{F}_y = \sum_i \vec{F}_{y,i} \\ \vec{F}_z = \sum_i \vec{F}_{z,i} \end{cases} \quad (3.4)$$

3.3.3 Terzo principio della dinamica o principio di azione-reazione

“Le forze si presentano sempre in coppia: se un corpo *A* esercita una forza $\vec{F}_{A,B}$ sul corpo *B*, il corpo *B* **reagisce** con una forza $\vec{F}_{B,A}$; le due forze hanno la stessa direzione, stesso modulo e verso opposto (sono *uguali e contrarie*)”

Questo **principio di azione e reazione** è espresso dalla legge:

$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A} \quad (3.5)$$

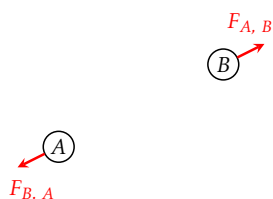


Figura 3.1: Forze attrattive

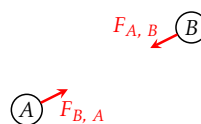


Figura 3.2: Forze repulsive

ESEMPIO. Il terzo principio ci permette di camminare. Immaginiamo di spingere sul pavimento col piede: stiamo imprimendo una forza alla Terra con una certa inclinazione.

$$\frac{\vec{F}_{\text{persona, Terra}}}{M_{\text{Terra}}} = \vec{a}_{\text{Terra}}$$

In teoria la Terra subisce un'accelerazione data dalla forza che imprimiamo su di essa, ma la massa del pianeta ha una magnitudine tale che questa accelerazione che subisce è microscopica e non modifica lo stato della Terra in modo sensibile. Perché mi muovo allora? Il pavimento, alla mia forza $\vec{F}_{\text{persona, Terra}}$, risponde con una $\vec{F}_{\text{Terra, persona}}$ applicata al mio piede, con direzione e modulo uguale a $\vec{F}_{\text{persona, Terra}}$ ma con verso opposto ($\vec{F}_{\text{persona, Terra}} = -\vec{F}_{\text{Terra, persona}}$) e punto di applicazione il piede.

$$\frac{\vec{F}_{\text{persona, Terra}}}{m_{\text{persona}}} = \vec{a}_{\text{persona}}$$

Questa accelerazione è molto maggiore di quella della Terra e per questo la percepiamo concretamente.

Con questo esempio abbiamo visto come non abbia senso fare la somma arbitraria delle forze: è fondamentale considerare il punto di applicazione.

3.4 QUANTITÀ DI MOTO

La **quantità di moto** è una grandezza vettoriale basata sul fatto che nella maggior parte di sistemi di forze la massa del corpo rimane costante, ovvero $\frac{dm}{dt} = 0$. Dalla legge di Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt}$$

Definiamo quindi la **quantità di moto** come la grandezza vettoriale data dalla legge:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.6)$$

La *dimensione* della quantità di moto è $[p] = [MLT^{-1}]$. L'unità di misura del SI è $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ (leggasi: "chilogrammo per metro al secondo").

La legge di Newton diventa:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.7)$$

Se $\vec{F} = 0$, allora $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, quindi $\vec{p} = \text{costante}$, ovvero si **conserva**. Questo è il **principio di conservazione della quantità di moto**:

"In assenza di forze applicate, la quantità di moto di un punto materiale rimane costante, ovvero la quantità di moto si conserva."

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{cost} \quad (3.8)$$

Il principio vale anche se $\vec{F}_{\text{ris}} = 0$, ovvero se la risultante delle forze totali è nulla.

3.4.1 Teorema dell'impulso

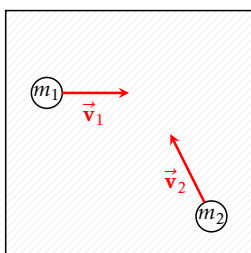
La legge di Newton nella forma $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ può essere riscritta come $\vec{F}dt = d\vec{p}$, ovvero per avere una variazione di \vec{p} devo agire una forza per un certo tempo. Se la forza agisce per un tempo finito t non infinitesimo, la quantità di moto si modificherà continuamente. Possiamo dunque ragionare con gli integrali. Definiamo l'**impulso della forza** come:

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F}dt = \int_{p_0}^p d\vec{p} = (\vec{p} - \vec{p}_0) = \Delta\vec{p} \quad (3.9)$$

Il **teorema dell'impulso** segue da questa definizione:

“L'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della quantità di moto.”

3.4.2 Accenni agli urti



Sia dato un **sistema isolato**, ovvero un sistema in cui le forze esterne non possono entrare ($\vec{F}_E = 0$). All'interno ci sono due palline di masse m_1 e m_2 che si muovono di velocità \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Queste due sferette si incontrano, senza frantumarsi in mille pezzi: cosa succede in quel momento?

Chiamiamo $\vec{F}_{1,2}$ la forza che la pallina 1 esercita sulla pallina 2 e $\vec{F}_{2,1}$ la forza che la pallina 2 esercita sulla pallina 1. Per il terzo principio della dinamica siamo nel caso di una azione-reazione. Segue dunque che $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$. $\vec{F}_{1,2}$ produce una variazione della quantità di moto di 2, e lo stesso è vero per $\vec{F}_{2,1}$ sulla quantità di moto di 1:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \vec{F}_{2,1} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

Considerando il sistema complessivo, si ha:

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = -\frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

Si ha una trasformazione di quantità di moto da una pallina ad un'altra. La quantità di moto del sistema è $\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$; confrontandola con i risultati precedenti:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{costante} \quad (3.10)$$

“In assenza di forze esterne, la quantità di moto totale di un sistema composto di 2 punti soggetti alla loro mutua interazione rimane costante nel tempo.”

ATTENZIONE! Questa affermazione è vera solamente se stiamo trattando di **urti perfettamente elastici**: nell'urto le sferette non si spaccano e rimangono intere, senza deformarsi definitivamente.

Si veda la trattazione completa alla sezione 7.1, pagina 77.

3.5 MOTI E FORZE

Vediamo quali sono le forze che producono i moti visti in cinematica.

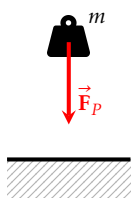
Moto rettilineo uniforme: $\vec{v} = \text{cost} \quad \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \vec{F} = 0$

Moto uniformemente acc.: $\vec{a} = \text{cost} \quad \Rightarrow \vec{F} = \text{cost} = m\vec{a}$

Moto piano curvilineo: $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_N = m \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + m \frac{v^2}{r} \hat{u}_N$

3.6 DIVERSI TIPI DI FORZE

3.6.1 Forza peso



Salendo su una bilancia non misuro la mia massa! Ciò che misuro è la forza con cui la Terra mi attrae. La **forza peso** o *peso* è una forza che si applica al baricentro del corpo ed è diretta verso il centro della Terra. Essa è data dalla legge:

$$\vec{F}_p = m\vec{g} \quad (3.11)$$

Con \vec{g} l'**accelerazione di gravità**, che mediamente ha valore $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, anche se può leggermente variare a seconda del luogo in cui si misura (es. dipende dalla latitudine e dall'altitudine).

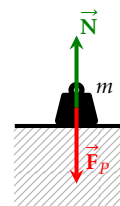
Poiché in un esperimento locale e nei problemi che affronteremo la Terra è "funzionalmente piatta", la forza è diretta verso il basso.

DIGRESSIONE. Il peso misurato sulla Terra è diverso da quello su altri pianeti dato che l'accelerazione di gravità è diversa. Ad esempio, sulla luna l'accelerazione è $g_{Luna} = 1,625 \text{ m/s}^2$. Il peso dunque *non* è una proprietà intrinseca, mentre la massa lo è, dato che rimane uguale ovunque (es. sulla Luna).

3.6.2 Reazioni vincolari

Un corpo appoggiato sul pavimento *non* subisce un'accelerazione perpendicolare al piano. Infatti, oltre alla forza peso, per il III principio della dinamica c'è una forza uguale e contraria data dal pavimento:

$$\vec{N} = -\vec{F}_p \quad \vec{N} = -m\vec{g}$$



Il pavimento funge da **vincolo**, ovvero un condizione che limita il moto di un corpo (es. il già citato pavimento, una corda, ...). La **reazione vincolare** è una forza che è sempre ortogonale al vincolo ed è opposta alla componente perpendicolare della risultante delle forze agenti sul corpo.

$$\vec{N} = -\vec{F}_{ris_\perp} \quad (3.12)$$

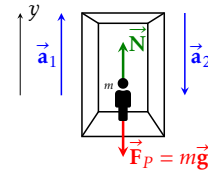
Se l'accelerazione nella direzione perpendicolare al vincolo è nulla, \vec{N} ha modulo tale da annullare tutte le forze aventi componenti in quella direzione.

ATTENZIONE! La forza peso esiste sempre, che sia in aria o appoggiata, la forza vincolare esiste solo se l'oggetto è sottoposto ad un vincolo (es. appoggiato al pavimento, attaccato ad un corda, ecc...).

3.6.2.1 Il caso dell'ascensore

Quando un'ascensore sale, chi è al suo interno percepisce una pressione sulle gambe; al contrario, se l'ascensore scende, sembra quasi di pesare di meno. Controllando con una bilancia ciò sembra verificarsi. A cosa è dovuta questo?

Mettiamo da un punto di vista esterno all'ascensore e studiamo i vari casi, supponendo come verso positivo dell'asse y quello verso l'alto.



- **ASCENSORE FERMO:** la reazione del pavimento controbilancia completamente la forza peso della persona.

$$\vec{N} = -m\vec{g} = -\vec{F}_p \quad (3.13)$$

- **ASCENSORE CHE SALE:** una forza esterna \vec{F}_{1a} tira su l'ascensore (e la persona al suo interno) con un'accelerazione $\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{1a}}{(M_a+m)}$. L'accelerazione è positiva, dunque la forza risultante sulla persona \vec{F}_{1p} è diretta verso l'alto. Le uniche forze che agiscono direttamente sulla persona sono la forza peso, che rimane costante, e la reazione del pavimento. Dato che la persona non sprofonda nel pavimento, la reazione vincolare del pavimento deve necessariamente aumentare rispetto allo stato di quiete.

$$\vec{N} + \vec{F}_p = \vec{F}_{1p} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{F}_p + \vec{F}_{1p} = mg + ma_1 = m(g + a_1) \quad (3.14)$$

- **ASCENSORE CHE SCENDE:** una forza esterna \vec{F}_{2a} tira giù l'ascensore (e la persona al suo interno) con un'accelerazione $\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{2a}}{(M_a+m)}$. L'accelerazione è negativa, dunque la forza risultante sulla persona \vec{F}_{2p} è diretta verso il basso. Le uniche forze che agiscono direttamente sulla persona sono la forza peso, che rimane costante, e la reazione del pavimento. Dato che la persona non si solleva in aria, ma scende con l'ascensore, la reazione vincolare del pavimento deve necessariamente diminuire rispetto allo stato di quiete.

$$\vec{N} + \vec{F}_p = -\vec{F}_{2p} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{F}_p - \vec{F}_{2p} = mg - ma_1 = m(g - a_1) \quad (3.15)$$

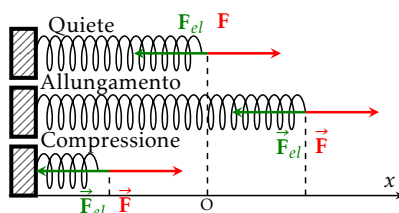
La bilancia dunque non misura effettivamente la nostra forza peso: essa misura il **peso apparente**, corrispondente proprio alla reazione vincolare del pavimento. Nel caso in quiete, il peso apparente corrisponde alla forza peso (dato che la reazione vincola è uguale e opposta al peso effettivo). In un sistema accelerato, invece, il peso apparente non è uguale al peso.

ATTENZIONE! Se studiassimo il problema con sistema di riferimento solidale alla persona, non avremmo alcuna accelerazione ma la forza risultante sulla persona non è nulla. Questo è dovuto al fatto che il sistema della persona *non* è inerziale e dunque la legge di Newton non vale.

3.6.3 Forza elastica

I corpi solidi, se sottoposti ad una sollecitazione \vec{F} , subiscono una deformazione; tuttavia, per conservare la forma, applicano all'origine della deformazione una **forza di richiamo** \vec{F}_{el} opposta e proporzionale alla deformazione. Per piccole deformazioni, tolta la sollecitazione iniziale, il corpo ritorna allo stato normale.

Questo succede anche con le molle. Abbiamo già spiegato il funzionamento della molla quando abbiamo descritto il funzionamento del dinamometro (sez. 3.2.2, pag. 36).



La legge che descrive la forza di richiamo di una molla è dato dalla **legge di Hooke**:

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta x \hat{i} \quad (3.16)$$

La legge lega la forza elastica di richiamo all'*allungamento* (o *compressione*) $\Delta x = x - x_0$, con x_0 la posizione a riposo e x la lunghezza compressa. Il fattore k è la **costante elastica della molla** e si ricava sperimentalmente dalla molla in uso nell'esperimento; la sua *dimensione* è $[k] = [MT^{-2}]$; l'unità di misura del SI è N/m (leggasi: "Newton al metro").

3.6.3.1 Il moto della molla

Il moto che risulta dalla molla è periodico, dato che la molla oscilla. Come lo possiamo vedere? Poniamo $x_0 = 0$. La forza elastica produce un moto accelerato con accelerazione:

$$a_x = \frac{\vec{F}_{el}}{m} = -\frac{kx}{m}$$

Ma l'accelerazione può essere vista come derivata seconda dello spazio percorso o, in questo caso, dell'allungamento:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Eguagliando le due equazioni:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Otteniamo l'*equazione differenziale del moto periodico*: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$. Risulta quindi che:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.17)$$

Cos'è però m ? Fino ad ora la molla è stata considerata come un oggetto astratto, senza massa o alcunché attaccato. Adesso sia m_{ogg} la massa di un corpo attaccato alla molla di massa m_{molla} . m dunque è la loro somma:

$$m = m_{ogg} + m_{molla}$$

ATTENZIONE! La forza elastica dipende solo dall'allungamento e *non* dalla massa; il moto, al contrario, dipende anche dalla massa attaccata, e l'accelerazione non ha un valore costante:

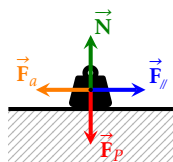
$$a(t) = -\frac{k}{m}x(t) = -\frac{k}{m}A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}x + \varphi\right) \quad (3.18)$$

Questa accelerazione è negativa: rallenta dalla situazione di deformazione fino a tornare in quiete allo stato iniziale.

3.6.4 Forze di attrito

Le **forze di attrito** sono forze collegate al moto di oggetti e al contatto fra corpi: si oppongono al moto o al tentativo di moto e non esistono in quiete, né possono generare moto; inoltre, nel caso di un vincolo, non influiscono alla reazione vincolare (anzi, alcuni dipendono da essa!). Gli attriti sono fenomeni estremamente vari e complicati da descrivere che dipendono da molti parametri in gioco, ma allo stesso tempo permettono molti aspetti fisici.

3.6.4.1 Attrito radente



Prendiamo un oggetto sul pavimento a cui sono soggette delle forze $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$. Più l'oggetto è pesante, più risulta difficile muoverlo nella direzione parallela al movimento con la forza $\vec{F}_//$; inoltre, le forze a cui è soggetto l'oggetto possono potenzialmente spingerlo verso il pavimento, rendendo ancora più difficoltoso lo spostamento.

Le componenti perpendicolari di queste forze, insieme alla forza peso, compongono la reazione vincolare del piano. La **forza di attrito radente** è la causa di questi problemi: si oppone al moto e dipende dalla reazione vincolare:

$$\vec{F}_a = -\mu N \hat{u}_V \quad (3.19)$$

Con \hat{u}_V il versore della direzione del movimento e μ **coefficiente d'attrito radente** un valore adimensionale dipendente dalle superfici in gioco che si ricava sperimentalmente. È necessario distinguere due attriti radenti. L'**attrito radente statico** è presente nei corpi in tentativo di moto ed è una condizione affinché si abbia il moto.

- $F_// \leq F_a = \mu_s N$: STATO DI QUIETE
- $F_// > F_a = \mu_s N$: STATO DI MOTO

Con μ_s il **coefficiente d'attrito radente statico**.

L'**attrito radente dinamico** entra in gioco quando il corpo è in movimento. Per delle stesse superfici l'attrito statico è maggiore dell'attrito dinamico ($\mu_s > \mu_d$): questo è il motivo per cui se un corpo a cui viene applicata una forza costante inizia a muoversi continuerà il suo moto indistintamente.

$$\vec{F}_// + \vec{F}_{a_d} = \vec{F}_// - \mu_d N \hat{u}_v = m \vec{a}$$

Con μ_d il **coefficiente d'attrito radente dinamico**.

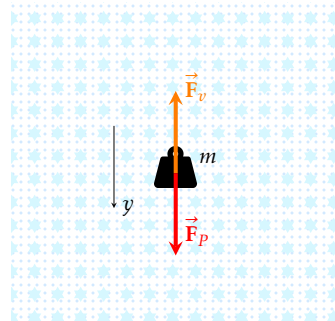
Per velocità comprese fra ~ 1 cm/s e parecchi m/s il valore di μ_d è costante. Inoltre, μ_d dipende dalle superfici di contatto *ma* non dall'area macroscopica di contatto. In generale, i coefficienti di attrito dipendono anche da fattori come temperatura, stato delle superficie, umidità... che vengono valutati superficialmente.

3.6.4.2 Attrito viscoso

L'**attrito viscoso** sono forze esercitate su un corpo che si muove in un fluido, che sia liquido e gas; si oppongono (come le altre forze d'attrito) al moto e sono proporzionali alla velocità del corpo soggetto alla forza (entro certi limiti):

$$\vec{F}_v = -b\vec{v} \quad (3.20)$$

b è il **coefficiente di viscosità** e dipende dal fluido in cui è immerso il corpo.



Qual è la *legge oraria* all'interno di un mezzo viscoso? L'oggetto parte con una velocità iniziale $v_0 \neq 0$. Le forze che agiscono sono la *forza peso* $\vec{F}_P = m\vec{g}$ e l'*attrito viscoso* $\vec{F} = -b\vec{v}$; quest'ultimo, in quanto è una forza che si oppone al moto, causa la *decelerazione* del corpo:

$$\vec{a} = -\frac{b\vec{v}}{m}$$

Essendo l'accelerazione la derivata rispetto al tempo della velocità, si ha che:

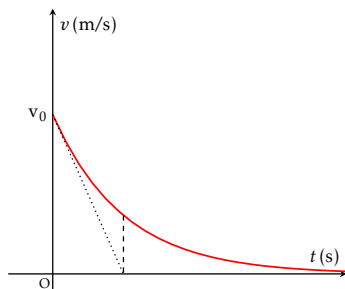
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{b\vec{v}}{m}$$

Riorganizzando per una integrazione:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{\vec{v}} &= -\frac{b}{m} dt \\ \int_{v_0}^v \frac{d\vec{v}}{\vec{v}} &= \int_{t_0}^t \left[-\frac{b}{m} dt \right] \\ \log \vec{v} - \log \vec{v}_0 &= -\frac{b}{m} (t - t_0) \\ \log \frac{\vec{v}}{\vec{v}_0} &= -\frac{b}{m} (t - t_0) \end{aligned}$$

Per semplicità poniamo $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \log \frac{\vec{v}}{\vec{v}_0} &= -\frac{b}{m} t \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 e^{-\frac{b}{m} t} \end{aligned} \quad (3.21)$$



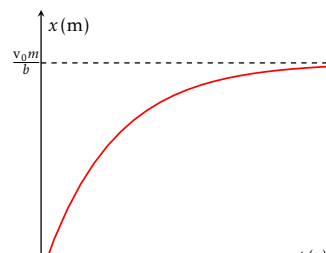
Questa è una **legge di smorzamento**: dopo un tempo $t^* = \frac{m}{b}$ la velocità diventa $\vec{v} = \frac{\vec{v}_0}{e}$, ovvero la velocità si riduce di un fattore e (circa un terzo); invece, per $t \rightarrow +\infty$ la velocità tende a zero.

Se la velocità diminuisce, *diminuisce l'attrito viscoso*. Quando il corpo si fermerà, anche la forza d'attrito sarà zero. Per trovare lo *spazio della frenata* del corpo nel mezzo viscoso, basta integrare $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$, ovvero integrare $d\vec{x} = \vec{v}_0 e^{-\frac{b}{m} t} dt$:

$$\int_{x_0}^x d\vec{x} = \int_{t_0}^t \vec{v}_0 e^{-\frac{b}{m}t} dt$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}_0 e^{-\frac{b}{m}t} dt = x_0 - \frac{v_0 m}{b} \left[e^{-\frac{b}{m}t} \right]_{t_0}^t =$$

$$= x_0 - \frac{v_0 m}{b} \left(e^{-\frac{b}{m}t} - e^{-\frac{b}{m}t_0} \right) = x_0 + \frac{v_0 m}{b} \left(e^{-\frac{b}{m}t_0} - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$



$$x = x_0 + \frac{v_0 m}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) \quad (3.22)$$

Ponendo $x_0 = 0$ dato un opportuno sistema di riferimento, otteniamo che la posizione tende asintoticamente al valore $\frac{v_0 m}{b}$.

ESEMPIO. Si consideri un *punto materiale* in *caduta libera* dentro un fluido e si supponga che su di esso agisca solo la forza peso e l'attrito viscoso (in questo caso con coefficiente $b = km$). A causa della forza peso, la sua *velocità aumenta*; allo stesso tempo *aumenta l'attrito viscoso*. Si raggiungerà una *condizione limite* per cui l'attrito viscoso equivarrà alla forza peso, cioè quando avrà raggiunto una **velocità limite**.

$$\vec{F}_p + \vec{F}_v = ma \Rightarrow mg - mkv = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv \Rightarrow \frac{dv}{g - kv} = dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{g - kv} = \int_{t_0}^t dt$$

$$-\frac{1}{k} [\log(g - kv)]_{v_0}^v = t - t_0$$

$$-\frac{1}{k} [\log(g - kv) - \log(g - kv_0)] = t - t_0$$

$$\log\left(\frac{g - kv}{g - kv_0}\right) = -k(t - t_0)$$

$$\frac{g - kv}{g - kv_0} = e^{-k(t-t_0)}$$

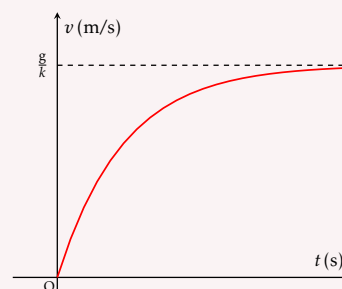
$$g - e^{-k(t-t_0)}(g - kv_0) = kv$$

$$v = v_0 e^{-k(t-t_0)} + \frac{g}{k} \left(1 - e^{-k(t-t_0)} \right)$$

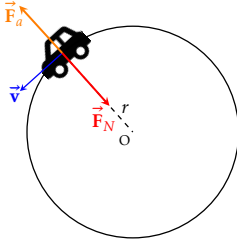
Se $v_0 = 0$ e $t_0 = 0$, segue che:

$$v = \frac{g}{k} \left(1 - e^{-kt} \right) \quad (3.23)$$

Partendo da zero, la velocità cresce sempre più lentamente per $t \gg \frac{1}{k}$, assumendo asintoticamente il valore $v = \frac{g}{k}$ costante.



3.7 FORZE CENTRIPETE



Il corpo si muove su una traiettoria di tipo circolare: la velocità \vec{v} è sempre tangenziale. Nel caso generale (sez. 2.5.3, pag. 29) abbiamo visto come l'accelerazione abbia una componente **tangenziale** e una perpendicolare o **centripeta**.

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = a\hat{u}_T + a\hat{u}_N$$

Nel caso sia uniforme $|\vec{v}| = \text{cost} \Rightarrow \vec{a}_T = 0 \quad \vec{a}_N = \frac{v^2}{r}\hat{u}_N$. Questa accelerazione corrisponde ad una **forza centripeta**:

$$\vec{F}_N = m\vec{a}_N = m\frac{v^2}{r}\hat{u}_N \quad (3.24)$$

ESEMPIO. Sia data una macchina in curva. La forza di attrito è quella generata dai pneumatici. La macchina si mantiene ad una distanza costante dal centro, ovvero esistono una forza centripeta \vec{F}_N e una forza d'attrito \vec{F}_a (dipendente dalla risultante \vec{N} delle forze normali al piano applicate al corpo) che si equivalgono:

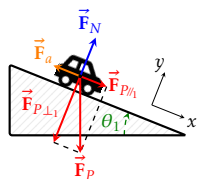
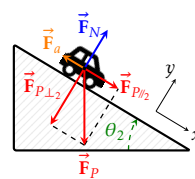
$$\begin{aligned} \vec{F}_N &= \vec{F}_a \\ m\frac{v^2}{r} &= \mu_s N \\ v^2 &= \frac{\mu_s N r}{m} \\ v &= \sqrt{\frac{\mu_s N r}{m}} \end{aligned}$$

Troviamo dunque una *velocità massima* per cui il corpo non esce dalla curva che dipende da μ_s e m . In questo caso, dato che siamo sul piano, l'unica forza con componenti verticali è la forza peso:

$$v = \sqrt{\frac{\mu_s \cancel{m} g r}{\cancel{m}}} = \sqrt{\mu_s g r}$$

3.8 APPLICAZIONI DELLE FORZE

3.8.1 Piano inclinato

Figura 3.3: Piano inclinato di θ_1 Figura 3.4: Piano inclinato di θ_2

Siano dati due piani inclinati con due masse uguali m . Il primo piano è inclinato di θ_1 , il secondo di θ_2 . Notiamo che sul piano 2 la massa si muove, mentre sul piano 1 la massa è in quiete. Perché?

Fissato un sistema di riferimento (asse x parallelo al piano, asse y perpendicolare ad esso) e scomposta la forza peso, notiamo che $F_{P\parallel 2} > F_{P\parallel 1} \Rightarrow F_P \sin \theta_2 > F_P \sin \theta_1$.

Cosa possiamo dire sulle forze d'attrito? Innanzitutto le forze vincolari, data l'assenza di spostamenti verticali, dipendono esclusivamente dalla componente perpendicolare della forza peso. Ciò significa che anche l'attrito dipende esclusivamente da essa. Nella direzione x abbiamo per il piano 2:

$$F_{P/2} - F_a = ma_x \Rightarrow F_P \sin \theta_2 - \mu_d F_P \cos \theta_2 = ma_x$$

$$a_x = g(\sin \theta_2 - \mu_d \cos \theta_2) \quad (3.25)$$

Nella direzione x per il piano 1 abbiamo invece un tentativo di moto che tuttavia *non* riesce a superare lo stato di quiete iniziale.

$$F_{a_1} = -\mu_s F_P \cos \theta_1 \quad (3.26)$$

Questo è il valore massimo d'attrito statico che la massa può opporre alla forza di $F_{P/1}$. Se studiamo le forze lungo la direzione x :

$$F_{P/1} + F_{a_1} = 0 \Rightarrow \cancel{F_P} \sin \theta_1 - \mu_s \cancel{F_P} \cos \theta_1 = 0$$

$$\mu_s = \tan \theta_1 \quad (3.27)$$

Notiamo che l'angolo massimo per cui il corpo non compie movimento dipende dall'attrito statico.

In sintesi:

- SE IL CORPO È IN PROCINTO DI MUOVERSI: $\theta_{max} = \arctan \mu_s$ è l'angolo massimo per cui il corpo rimane in quiete.
- SE IL CORPO È IN MOTO: compie un moto uniformemente accelerato con $a_x = g(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$.

Nel caso in moto, per conoscere il tempo impiegato dall'oggetto a scendere il piano e la velocità alla fine del percorso dobbiamo sapere la lunghezza della discesa.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v(t) = a_x t \end{cases}$$

Ponendo $x(t) = L$:

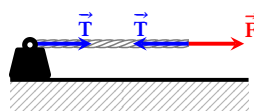
$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v(t) = a_x t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \sqrt{\frac{2L}{a_x}} = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)}} \\ v(t) = \sqrt{2gL(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)} \end{cases}$$

3.8.2 Funi e carrucole

Funi e carrucole sono idealizzazioni fisiche che permettono di tramettere l'azione di una forza applicata in un punto ad un punto diverso.

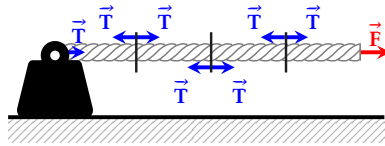
La **tensione** è una forza che si sviluppa all'interno delle funi soggette a forze. Per idealizzazione, la **fune** ha massa trascurabile (come la molla in molti problemi) ed è inestensibile.



Per il principio di azione-reazione, se la fune *non* si estende, segmentandola in tanti pezzetti essi *non* si muovono, ma trasmettono la forza \vec{F} in modo tale che ogni punto della corda abbia accelerazione nulla rispetto agli punti.

L'accelerazione agli estremi della *corda* è uguale, e quindi la tensione all'altro capo della fune non è altro che la forza applicata inizialmente.

$$\vec{T} = \vec{F} \quad (3.28)$$



Possiamo vederlo anche in questo modo. Sia \vec{F}_1 la forza che il corpo esercita *sulla corda* di massa M . Per la terza legge di Newton, la forza che la corda esercita sul corpo è:

$$\vec{T} = -\vec{F}_1$$

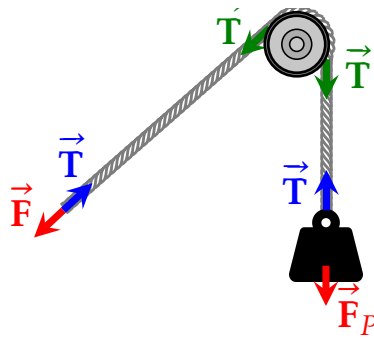
Applicando la seconda legge di Newton alla corda (che ricordiamo avere massa trascurabile):

$$\vec{F}_1 + \vec{F} = m\vec{a}$$

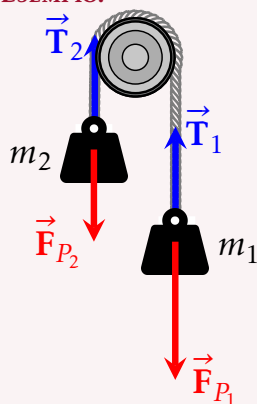
Tuttavia:

- In condizioni statiche $\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{F}_1 \Rightarrow \vec{T} = \vec{F}$
- In condizioni dinamiche $m = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{F}_1 \Rightarrow \vec{T} = \vec{F}$

Una **carrucola** cambia direzione alla forza che riceve dalla fune, senza cambiarne il modulo.



La forza con cui tiriamo la fune è uguale alla tensione della fune. Pertanto, il corpo potrà essere sollevato se $F > F_P$.

ESEMPIO.

Sia data la configurazione di funi e carrucole come nell'immagine. Se le due tensioni fossero diverse, la fune si allungerebbe! Pertanto, $\vec{T}_1 = \vec{T}_2 = \vec{T}$. Inoltre, a meno di un segno, $a_1 = a_2 = a$. Se non lo fosse avremmo una variazione di velocità e quindi la fune sarebbe estensibile. Dunque se a_1 positiva, allora a_2 negativa. I due corpi sono indipendenti anche se collegati da una fune, quindi studiamo separatamente le forze agenti su di essi. Troviamo la tensione dal confronto delle due equazioni:

$$\begin{cases} m_2 [T - m_1 g] = m_2 m_1 a \\ m_1 [T - m_2 g] = -m_1 m_2 a \end{cases} \Rightarrow (m_1 + m_2)T - 2m_1 m_2 g = 0$$

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \quad (3.29)$$

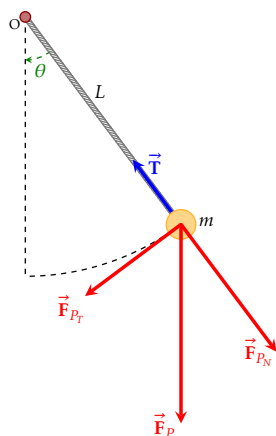
L'accelerazione la ricaviamo sostituendo la tensione in una delle due equazioni:

$$a = \frac{T}{m_1} - g = \frac{2\cancel{m_1}m_2g}{\cancel{m_1}(m_1 + m_2)} - g = \frac{(2m_2 - m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g \quad (3.30)$$

Il sistema dunque ha un moto uniformemente accelerato, in cui il verso è deciso dalla massa maggiore.

3.8.3 Pendolo



Il **pendolo** è un'idealizzazione fisica costituita da un punto di massa m appeso ad una fune inestensibile di lunghezza L (fissa). In quiete, le forze che agiscono sono solo la tensione vincolare e la forza peso:

$$\vec{T} = -\vec{F}_p = -m\vec{g} \quad (3.31)$$

O, in modulo, $T = mg$.

In movimento, alla tensione si oppone la componente perpendicolare del peso, mentre in direzione tangenziale la forza peso dà vita ad un'accelerazione tangenziale. Studiando per componenti:

$$\hat{u}_N : T - F_{p_N} = ma_N \Rightarrow T - mg \cos \theta = ma_N \quad (3.32)$$

$$\hat{u}_T : F_{p_T} = ma_T \Rightarrow -mg \sin \theta = ma_T \Rightarrow a_T = -g \sin \theta \quad (3.33)$$

Al cambiare dell'angolo cambia la tensione. Data l'accelerazione centripeta $a_N = \frac{v^2}{L}$ possiamo ricavare il valore della tensione:

$$\vec{T} = m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{L} \right) \hat{u}_N \quad (3.34)$$

OSSERVAZIONE. Se il corpo viene lasciato dal punto massimo (alla stessa altezza del vincolo della fune, $\theta = 90^\circ$) con *velocità iniziale nulla*, la velocità *cresce*, arriva al suo *massimo* in $\theta = 0$, poi *diminuisce*. Per questo motivo, come il moto circolare, anche il moto del pendolo è un *moto periodico*.

Possiamo parlare di accelerazione angolare. $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ con $\omega = \frac{v}{r}$, ma essendo $r = L$ fissa, si ha che:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(v/r)}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{r}$$

Quindi:

$$a_T = r\alpha = r \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3.35)$$

Dall'analisi delle componenti su $\hat{\mathbf{u}}_T$ si ha che $a_T = -g \sin \theta$, e dunque:

$$-g \sin \theta = r \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{r} \sin \theta$$

Con θ piccolo, $\sin \theta \sim \theta$. Pertanto, la legge diventa:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{r} \theta$$

E quindi:

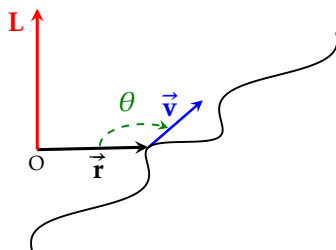
$$\theta = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.36)$$

Con $\omega = \left(\frac{g}{L}\right)^{1/2}$ e $A = \theta_0$

3.9 MOMENTO

Il termine “**momento**” in fisica si riferisce ad un *prodotto vettoriale* tra il *vettore raggio* e una *grandezza vettoriale*.

3.9.1 Momento angolare



Il **momento angolare** o **momento della quantità di moto** di una particella rispetto all'origine O (detto **polo**) è una grandezza vettoriale definita come:

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = m(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}) \quad (3.37)$$

- **MODULO:** $L = mrv \sin \theta$
- **DIREZIONE:** *perpendicolare* sia al vettore $\vec{\mathbf{r}}$, sia a $\vec{\mathbf{p}}$.
- **VERSO:** segue la *regola della mano destra*.

Se cambio il polo da O a O' , il momento rispetto al polo O' risulta:

$$\vec{\mathbf{L}}_{O'} = \vec{\mathbf{L}}_O + \vec{\mathbf{O}'\mathbf{O}} \times m\vec{\mathbf{v}} \quad (3.38)$$

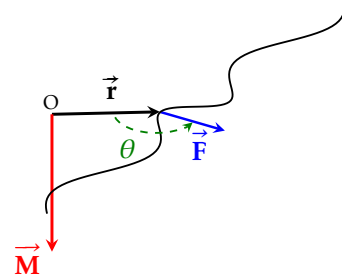
La *dimensione* del momento angolare è $[\vec{\mathbf{L}}] = [ML^2T^{-1}]$. L'unità di misura del SI è $J \cdot s$ (leggasi: “joule per secondo”) o $kg \cdot m^2 \cdot t^{-1}$ (leggasi: “chilogrammo per metro quadro al secondo”). Definiremo cos'è il joule nel capitolo successivo.

3.9.2 Momento di una forza

Il **momento di una forza** è la seguente grandezza vettoriale:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.39)$$

- MODULO: $M = rF \sin \theta$
- DIREZIONE: *perpendicolare* sia al vettore \vec{r} , sia a \vec{F} .
- VERSO: segue la *regola della mano destra*.



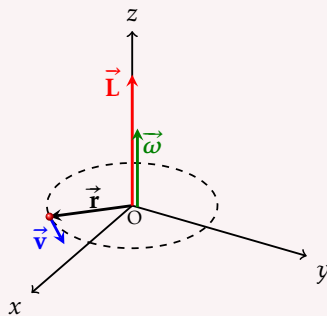
Se cambio il polo da O a O' , il momento rispetto al polo O' risulta:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F} \quad (3.40)$$

Se ad un corpo sono applicate più forze con $\vec{F}_{ris} = \sum_i \vec{F}_i$ la risultante, si ha che il momento complessivo è uguale al momento della risultante:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{F}_{ris} \quad (3.41)$$

ATTENZIONE! Questo è vero *solo* se le forze hanno tutte un unico punto di applicazione.

ESEMPIO.

Trovare il momento angolare di una massa puntiforme che si muove su una circonferenza di raggio \vec{r} , con velocità angolare ω .

SVOLGIMENTO:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = rmv\hat{k} = mr^2\omega\hat{k}$$

Considerando ω come vettore:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

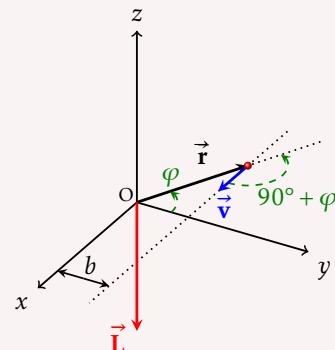
Nel moto circolare uniforme $\omega = \text{cost} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0$.

ESEMPIO.

Trovare il momento angolare, rispetto all'origine O , di una particella che si muove con velocità costante \vec{v} su una retta parallela all'asse x distante b dall'origine.

SVOLGIMENTO:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = -rmv \sin(90^\circ + \varphi) \hat{k} = \\ &= -rmv \cos \varphi \hat{k} = -m vb \hat{k} \end{aligned}$$



3.9.3 Teorema del momento angolare

Dato il momento angolare $\vec{L}(t) = m(\vec{r} \times \vec{v})(t)$, esso varia in funzione del tempo. Se calcoliamo la variazione rispetto al tempo del momento di un punto materiale, si ha:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\vec{v}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \underbrace{m\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=m\vec{a}} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{\vec{v} \times \vec{v} = 0} + \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.42)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad (3.43)$$

Questa relazione rappresenta il **teorema del momento angolare**:

“La derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo fisso.”

3.9.4 Teorema del momento dell'impulso

Possiamo riformulare il teorema del momento angolare in un **teorema del momento dell'impulso**. Supponiamo costante \vec{r} . Da $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ ricaviamo $d\vec{L} = \vec{M}dt$; per integrazione:

$$\begin{cases} \int_0^t \vec{M}dt = \int_0^t (\vec{r} \times \vec{F})dt = \vec{r} \times \int_0^t \vec{F}dt = \vec{r} \times \vec{J} \\ \int_0^t \vec{M}dt = \int_0^t d\vec{L} = \vec{L}_F - \vec{L}_I = \Delta\vec{L} \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{L} \quad (3.45)$$

Definendo $\vec{r} \times \vec{J}$ il **momento dell'impulso**, il teorema dell'impulso afferma che:

“La variazione del momento angolare è uguale al momento dell'impulso.”

Si può dimostrare il teorema appena enunciato anche usando il *teorema dell'impulso* visto in precedenza (sez. 3.4.1, pag. 39). Noto che $\vec{J} = \Delta\vec{p}$:

$$\vec{r} \times \vec{J} = \vec{r} \times \Delta\vec{p} = \vec{r} \times (\vec{p}_F - \vec{p}_I) = \vec{r} \times \vec{p}_F - \vec{r} \times \vec{p}_I = \vec{L}_F - \vec{L}_I = \Delta\vec{L}$$

DINAMICA II: LAVORO ED ENERGIA

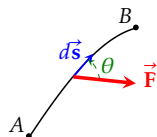
“Mai sottovalutare la potenza della stupidità umana.”

ROBERT A. HEINLEIN, *umano*.

4.1 LAVORO

DATA UNA GENERICA TRAIETTORIA e la risultante delle forze in gioco \vec{F} , il **lavoro** della forza \vec{F} compiuto durante lo spostamento dalla posizione A alla B è la quantità *scalare*:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F \cos \theta ds = \int_A^B F_T ds \quad (4.1)$$



- Se $\theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta > 0$: il lavoro è *positivo*.
- Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$: il lavoro è *nullo*.
- Se $\theta > \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta < 0$: il lavoro è *negativo*.

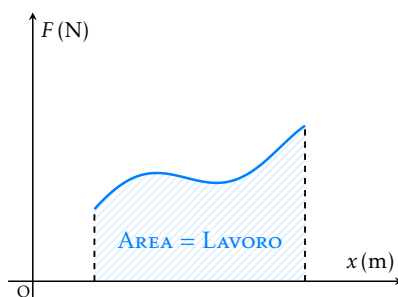
OSSERVAZIONE. Se \vec{F} è ortogonale alla traiettoria, \vec{F} è centripeta e *non* compie lavoro.

La *dimensione* del lavoro è $[W] = [FL] = [ML^2T^{-2}]$. L'unità di misura del SI è J (leggasi: “joule”) o N · m (leggasi: “newton per metro”).

Se in un campo agiscono più forze, il lavoro della forza totale è la somma dei lavori delle singole forze. Questo segue dalla proprietà degli integrali:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \dots + \int_A^B \vec{F}_n \cdot d\vec{s} = W_1 + \dots + W_n$$

Sempre per proprietà degli integrali, abbiamo che il lavoro di una forza è uguale all'*area* sottesa alla curva che rappresenta la forza nel tratto corrispondente allo spostamento.



4.1.1 Potenza

Il lavoro per unità di tempo prende il nome di **potenza** e misura la rapidità con cui si compie un lavoro. La **potenza istantanea** quindi si esprime come:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{s}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = F_T v \quad (4.2)$$

La **potenza media** è il rapporto tra il lavoro totale e il tempo impiegato a svolgerlo:

$$P_{media} = \frac{W}{\Delta t} \quad (4.3)$$

La *dimensione* della potenza è $[P] = [FLT^{-1}] = [ML^2T^{-3}]$. L'unità di misura del SI è W (leggasi: "watt") o $J \cdot s^{-1}$ (leggasi: "joule al secondo").

4.2 ENERGIA E LAVORO

4.2.1 Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica

Definiamo la quantità **energia cinetica**, una *forma di energia* legata al *movimento*:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.4)$$

Possiamo anche esprimerla in funzione della quantità di moto $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$:

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \quad (p = \sqrt{2mE_K}) \quad (4.5)$$

Esiste una relazione tra lavoro compiuto ed energia cinetica, enunciato nel **teorema dell'energia cinetica**:

"Il lavoro compiuto dalla forza risultante che agisce su un corpo è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo."

Infatti, notiamo che la variazione infinitesima di lavoro è dipendente dalla variazione di velocità:

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = F \cos \theta ds = F_T ds = ma_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = mv dv$$

Per un percorso finito da A a B, il lavoro diventa:

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B mv dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{K,B} - E_{K,A} = \Delta E_K$$

$$W = \Delta E_K \quad (4.6)$$

- $W > 0 \Leftrightarrow E_{K,finale} > E_{K,iniziale}$
- $W < 0 \Leftrightarrow E_{K,finale} < E_{K,iniziale}$
- $W = 0 \Leftrightarrow E_{K,finale} = E_{K,iniziale}$

Nell'ultimo caso abbiamo un sistema ad energia cinetica *costante*; questo si vede chiaramente nel *moto circolare uniforme*: il lavoro compiuto dall'unica forza in gioco, la forza centripeta, è nullo. La velocità è quindi costante e l'accelerazione è perpendicolare allo spostamento.

ATTENZIONE! Il *lavoro* è la manifestazione dell'*azione* di una forza: si parla sempre di lavoro **scambiato** col sistema e *non* di lavoro posseduto da un sistema.

L'*energia* è invece **posseduta** dal sistema e si modifica con l'ambiente esterno. Un effetto misurabile è la *variazione* di energia.

La dimensione e l'unità di misura dell'energia cinetica sono le stesse del lavoro, quindi usiamo il Joule.

DIGRESSIONE. Nello studio di atomi e particelle, data le ridottissime dimensioni, si opta per unità di misura l'*elettronvolt* (eV): un elettronvolt è l'energia guadagnata o persa dalla carica elettrica di un singolo elettrone che si muove nel vuoto tra due punti avente differenza di potenziale di un volt.

Possiamo ottenere un risultato analogo al teorema dell'energia cinetica se abbiamo una forza \vec{F} costante.

$$W = F_x \Delta x = m a_x \Delta x$$

Dallo studio della cinematica abbiamo:

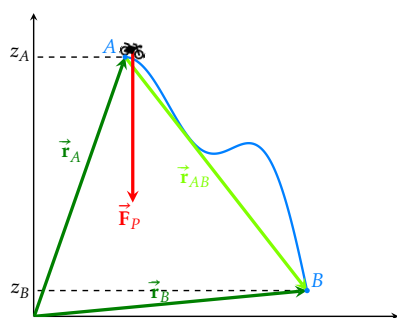
$$v_{finale}^2 = v_{iniziale}^2 + 2a_x \Delta x$$

$$a_x \Delta x = \frac{1}{2} (v_{finale}^2 - v_{iniziale}^2)$$

Moltiplicando per m :

$$W = m a_x \Delta x = \frac{1}{2} m (v_{finale}^2 - v_{iniziale}^2) = E_{K,finale} - E_{K,iniziale} = \Delta E_K$$

4.2.2 Lavoro della forza peso



Studiamo il lavoro fatto dalla *forza peso*.

In questo caso, essendo \vec{F}_P costante, possiamo portarla fuori dall'integrale:

$$W = \int_A^B \vec{F}_P \cdot d\vec{s} = \vec{F}_P \cdot \int_A^B d\vec{s}$$

Dato che $F_P = -mg$ ha solo componenti lungo l'asse z , nel prodotto scalare compare solo la componente z :

$$W = m\vec{g} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = m\vec{g} \cdot \vec{r}_{BA} = (m\vec{g})_z \cdot (\vec{r}_{BA})_z = -mg(z_B - z_A) = -(E_{P,B} - E_{P,A}) = -\Delta E_P$$

Definiamo la quantità **energia potenziale della forza peso**. Essa è una funzione puntuale che dipende solo dallo spostamento tra A e B (e dunque dal cambio di quota) e *non* dalla traiettoria che collega A e B .

Possiamo quindi parlare in generale di **energia potenziale gravitazionale** come una

forma di energia, dovuta alla forza di gravità, che è posseduta da un corpo in virtù della sua posizione. Dato un sistema di riferimento, un corpo ad altezza h ha energia potenziale:

$$E_p = mgh \quad (4.7)$$

ATTENZIONE! E_p dipende dal punto rispetto al quale si misura h , il che è *arbitrario*: tuttavia, ciò che importa è la variazione di energia potenziale, la quale *non* varia rispetto al sistema di riferimento scelto.

L'energia potenziale si chiama così in quanto possiamo vederla come la *capacità di compiere* un lavoro:

$$E_A^P = W + E_B^P$$

ESEMPIO. Un punto di massa m si trova alla base di un piano inclinato liscio. Se la velocità iniziale è v_A , diretta verso l'alto parallelamente al piano, qual è l'altezza z_B rispetto alla base $z_A = 0$ della posizione in cui il punto si ferma?

SVOLGIMENTO: il lavoro per alzare il punto alla quota z_B è data dall'energia potenziale:

$$W = -\Delta E_p = -mg(z_B - z_A) = -mgz_B$$

Per il teorema dell'energia cinetica:

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 - mgz_B$$

Il corpo riesce a salire perché ha una certa energia cinetica. Ricaviamo quindi la quota:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mgz_B \Rightarrow z_B = \frac{v_A^2}{2g}$$

Troviamo lo stesso risultato visto in cinematica.

ESEMPIO. Un massa $m = 50$ g è appesa ad un filo di lunghezza $l = 25$ cm inestensibile. Il filo viene spostato di un angolo $\theta_0 = 60^\circ$ rispetto alla verticale. Qual è la velocità per cui m passa per la verticale?

SVOLGIMENTO: il lavoro da A a B è:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{T} + m\vec{g}) \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{T} \cdot d\vec{s} + \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s}$$

Essendo $\vec{T} \perp \vec{s}$, $\int_A^B \vec{T} \cdot d\vec{s} = 0$, si ha che $W_{A \rightarrow B} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s}$.

$\vec{g} \cdot d\vec{s}$ è il prodotto del modulo di \vec{g} per la proiezione di $d\vec{s}$ sulla direzione di \vec{g} , ovvero y ; otteniamo $d\vec{s} \cdot \hat{j} = dy$. Allora:

$$W_{A \rightarrow B} = -m \int_A^B g \cdot dy = mg(y_A - y_B)$$

Con $y_B = 0$ abbiamo $W_{A \rightarrow B} = mgy_A$. Poiché il punto parte da fermo v_A , si ha per il teorema dell'energia cinetica che $W_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2}mv_B^2$. Allora:

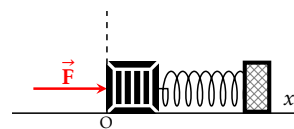
$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgy_A$$

Ed essendo $y_A = l \cos 60^\circ = \frac{l}{2}$, si ha che $v_B = \sqrt{gl} = 1,58 \text{ m/s}^2$

4.2.3 Lavoro della forza elastica

Il lavoro compiuto dalla forza elastica nel tratto compreso fra A e B è:

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_A^B (-kx\hat{\mathbf{u}}_x) \cdot dx\hat{\mathbf{u}}_x = \int_A^B (-kx) dx = \\ &= -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right) = -(E_{P,B} - E_{P,A}) = -\Delta E_P \end{aligned}$$



$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_P$$

Definiamo l'**energia potenziale elastica** che, come quella gravitazionale, dipende solo dalla *posizione*:

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.8)$$

- Se il punto si muove *verso* il centro della forza, $W > 0$ ed E_P diminuisce.
- Se il punto si *allontana* dal centro della forza, $W < 0$ ed E_P aumenta.

4.2.4 Lavoro della forza d'attrito radente

Nota la forza d'attrito dinamico $\vec{\mathbf{F}}_d = -\mu_d N \hat{\mathbf{u}}_v$, il lavoro compiuto fra A e B è:

$$\begin{aligned} W_{\vec{\mathbf{F}}_d, A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{\mathbf{F}}_d \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_A^B (-\mu_d N \hat{\mathbf{u}}_v) \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\mu_d N \int_A^B d\vec{\mathbf{s}} \\ W_{\vec{\mathbf{F}}_d, A \rightarrow B} &= -\mu_d N \int_A^B d\vec{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

L'integrale $\int_A^B d\vec{\mathbf{s}}$ è la **lunghezza del percorso** da A a B , misurato lungo la *traiettoria effettiva* del punto materiale: a differenza dell'energia potenziale (gravitazione ed elastica), essa dipende dal percorso effettuato dalla forza.

Il *lavoro dell'attrito radente* è sempre negativo, essendo un lavoro *resistente* (cambiando il verso del moto cambia quello della forza d'attrito).

4.3 FORZA CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE

Se il lavoro compiuto da una forza *non* dipende dal *percorso fatto* ma solo dallo **spostamento**, allora la forza si dice **conservativa**. Il lavoro di una forza **non conservativa** dipende dal percorso effettuato.

- **FORZE CONSERVATIVE:** forza peso, forza elastica, ...
- **FORZE NON CONSERVATIVE:** forze d'attrito, forze legate a grandi deformazioni

4.3.1 Energia meccanica

OSSERVAZIONE. Il teorema dell'energia cinetica vale per qualunque forza, conservativa e non.

Data questa osservazione, per le forze conservative il lavoro può essere espresso sia come variazione di *energia cinetica* ($W = \Delta E_K$), sia come variazione di *energia potenziale* ($W = -\Delta E_P$). Allora:

$$\begin{aligned}\Delta E_K &= -\Delta E_P \\ E_K^F - E_K^I &= E_P^I - E_P^F \\ E_P^I + E_K^I &= E_P^F + E_K^F\end{aligned}\quad (4.10)$$

Questo è chiamato **principio della conservazione dell'energia meccanica** e si verifica *solo* con le forze conservative. Definiamo quindi l'**energia meccanica**:

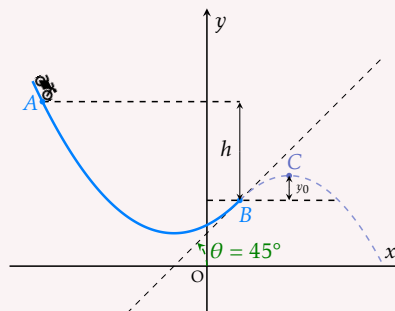
$$E_M = E_P + E_K = \text{cost} \quad (4.11)$$

In un dato sistema di forze conservative, l'energia meccanica rimane costante.

ESEMPIO.

Un punto materiale è posto in A, inizialmente in quiete. Viene abbandonato sotto l'azione della forza peso, lasciandolo scivolare lungo la guida (il cui attrito è trascurabile).

- Calcolare la velocità con cui arriva in B, posto più in basso ad un dislivello h .
- Calcolare la quota massima y_0 rispetto a B raggiunta dal punto materiale nel vertice C se nell'estremo della guida forma un angolo $\theta = 45^\circ$ rispetto all'orizzontale.



SVOLGIMENTO: Le forze che agiscono sono la forza peso \vec{F}_P e la reazione \vec{N} . Ai fini del lavoro, tuttavia, solo la forza peso compie lavoro dato che la reazione è normale allo spostamento. Data l'assenza di attriti possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica, noto inoltre che $v_A = 0$ e $y_A - y_B = h$:

$$\cancel{\frac{1}{2}mv_A^2} + \cancel{mgy_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 + \cancel{mgy_B} \Rightarrow v_B^2 = 2g(y_A - y_B) = 2gh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

Questo risultato è indipendente dalla traiettoria effettiva che, se complessa, avrebbe complicato lo studio da un punto di vista cinematico; invece, con la conservazione dell'energia meccanica, il tutto si risolve facilmente.

Per lo studio del tratto da B a C non abbiamo da tener conto (eccetto la velocità in B) il tratto da A a B. Il moto prosegue come il moto del proiettile, con velocità iniziale v_B in B con inclinazione di 45° :

$$\begin{cases} v_B^2 = v_{Bx}^2 + v_{By}^2 \\ v_C^2 = v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2 \end{cases}$$

Sappiamo inoltre che $v_{Bx} = v_{By}$ (perché $\theta = 45^\circ$), $v_{Cx} = v_{Bx}$ (sulla componente x del moto parabolico il moto è rettilineo uniforme e quindi la velocità è costante) e $v_{Cy} = 0$

(dato che siamo nel piccolo della traiettoria). Allora le equazioni sopra diventano:

$$V_{Bx}^2 = \frac{1}{2}V_B^2$$

$$V_C^2 = V_{Cx}^2 = V_{Bx}^2 = \frac{1}{2}V_B^2$$

Dalla legge di conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgy_B = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgy_C$$

$$y_0 = y_C - y_B = \frac{1}{2g}(v_B^2 - v_C^2) = \frac{1}{2g}\left(v_B^2 - \frac{v_B^2}{2}\right) = \frac{1}{4g}v_B^2 = \frac{2gh}{4g} = \frac{h}{2}$$

ESEMPIO. Ritorniamo al caso del pendolo visto in precedenza (sez. 4.2, pag. 56). Con la conservazione dell'energia meccanica troviamo subito la velocità al passaggio della verticale:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgy_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgy_B$$

$$gy_A = \frac{1}{2}v_B^2$$

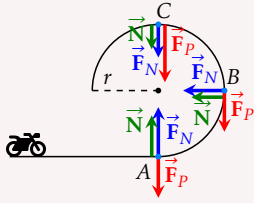
$$gl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

ESERCIZIO. Un corpo di massa $m = 10$ kg viaggia con velocità $v_x = 14$ m/s contro una molla con $k = 7000$ N/m. Di quanto si deforma la molla (si cerca dunque lo spostamento x_0 dal punto di riposo?)

SVOLGIMENTO: Il corpo colpisce, deformando la molla: ad un certo punto la deformazione si ferma perché la forza prodotta dalla molla è contrapposta a quella che riceve. All'inizio c'è solo energia cinetica, alla solo energia potenziale.

$$E_M^I = E_M^F \Rightarrow \frac{1}{2}kx_I^2 + \frac{1}{2}mv_I^2 = \frac{1}{2}kx_F^2 + \frac{1}{2}mv_F^2 \Rightarrow x_F = x_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}v_I$$

ESERCIZIO.

Un punto è lanciato con velocità \vec{v}_0 lungo una guida circolare liscia di raggio R che giace in un piano verticale. Qual è il valore minimo di v_0 affinché il punto arrivi in C senza staccarsi dalla guida.

SVOLGIMENTO: Poniamo $h_A = 0$. Ricaviamo dall'energia meccanica la velocità lungo il giro della morte.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

- In B : $h = R \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gR}$

- In C : $h = 2R \Rightarrow v_C = \sqrt{v_0^2 - 4gR}$

La forza centripeta è data da $\vec{F}_C = \vec{N} + \vec{F}_P = \vec{N} + m\vec{g} = m\frac{v}{r}\hat{u}_N$. La reazione vincolare è massima in A e prosegue andando verso C .

- A : $N_A - mg = m\frac{v_0^2}{R} \Rightarrow N_A = m\frac{v_0^2}{R} + mg$

- B : $N_B - 0 = m\frac{v_B^2}{R} \Rightarrow N_B = m\frac{v_B^2}{R} = m\frac{v_0^2}{R} - 2mg$

- C : $N_C + mg = m\frac{v_C^2}{R} \Rightarrow N_C = m\frac{v_C^2}{R} - mg = m\frac{v_0^2}{R} - mg - 4mg = m\frac{v_0^2}{R} - 5mg$

Il valore minimo di v_0 lo abbiamo per $N_C = 0$ (N_C non deve essere negativo!):

$$m\frac{v_0^2}{R} = 5mg \Rightarrow v_0 = \sqrt{5gR}$$

4.3.2 Forze dissipative

Nelle forze *non* conservative spicca la classe delle **forze dissipative**, a cui appartengono le forze d'attrito e le forze delle grandi deformazioni. Esse sono forze che dissipano l'energia meccanica in *energia termica*. Ad esempio, allungando una molla oltre il limite elastico essa si deforma senza possibilità di ritornare allo stadio iniziale. L'energia "persa" è, appunto, dissipata in energia termica.

In generale queste forze dipendono da parametri diversi dalla posizione iniziale e finale del corpo (ad es. velocità, percorso effettuato, ecc...).

4.3.3 Lavoro delle forze non conservative

Il lavoro compiuto da un corpo che si sposta dal punto A al punto B può essere visto come la *somma* dei lavori di *forze conservative* W_C e dei lavori di *forze non conservative* W_{NC} . In ogni caso, vale comunque il teorema dell'energia cinetica:

$$W_{A \rightarrow B} = W_C + W_{NC} = E_{K,B} - E_{K,A} \quad (4.12)$$

Invece, sappiamo che il lavoro delle forze conservative dipende dalla variazione di energia potenziale:

$$W_C = -(E_{P,B} - E_{P,A}) \quad (4.13)$$

Allora:

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= -(E_{P,B} - E_{P,A}) + W_{NC} = E_{K,B} - E_{K,A} \\ W_{NC} &= (E_{P,B} + E_{K,B}) - (E_{P,A} + E_{K,A}) \end{aligned}$$

$$W_{NC} = E_{M,B} - E_{M,A} \quad (4.14)$$

In presenza di forze non conservative l'energia meccanica *non* rimane costante e, inoltre, la sua *variazione* corrisponde proprio al lavoro svolto dalle forze non conservative.

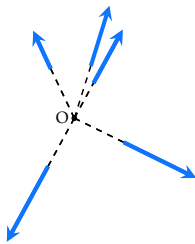
DINAMICA III: GRAVITAZIONE

“*Marty McFly: Andiamo sul pesante...*”

“*Dottor Emmett Brown: Ancora questa parola... "pesante". Ma perché è tutto così pesante per voi del futuro? Avete problemi con la forza di gravità?*”

RITORNO AL FUTURO

5.1 FORZE CENTRALI



LE FORZE CENTRALI sono forze che agiscono in certe zone dello spazio:

- In ogni punto sono *dirette* verso un punto fisso O detto **centro** della forza.
- Il *modulo* è in funzione alla *distanza* dal centro.

$$\vec{F} = F\hat{u}_r \Rightarrow \begin{cases} \text{repulsiva se } \vec{F} \text{ e } \vec{r} \text{ sono paralleli.} \\ \text{attrattiva se } \vec{F} \text{ e } \vec{r} \text{ sono antiparalleli.} \end{cases}$$

Abbiamo il primo caso, ad es., tra cariche elettriche dello *stesso segno*, mentre il secondo si verifica fra *masse* o tra cariche di *segno opposto*.

Le forze centrali generano un **campo di forza** che agisce su ogni particella in ogni punto dello spazio.

5.1.1 Momenti e forze centrali

Studiamo il momento di una forza centrale. Si ha:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = r\hat{u}_r \times F(r)\hat{u}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{cost}$$

In campi di forze centrali il *momento della forza* rispetto al centro è nullo, quindi il *momento angolare* è costante. Dunque è anche costante il **piano** dei vettori \vec{r} e \vec{v} . La traiettoria di P è *curvilinea e piana*. Il verso di L definisce il **verso di percorrenza** della traiettoria.



Il momento angolare, visto in componenti radiali e ortogonali, diventa:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$$

Dato che \vec{r} e \vec{v}_r sono paralleli, mentre \vec{r} e \vec{v}_θ sono perpendicolari, il modulo è:

$$L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Se \vec{L} è costante, anche il modulo è costante e quindi $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ è costante: in un tempo dt il raggio vettore spazza un'area infinitesima approssimabile ad un triangolo di base $r d\theta$ e altezza r :

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Introduciamo la **velocità areolare**:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} \quad (5.1)$$

Quindi, se L è costante, anche la velocità areolare è costante. Se la traiettoria è chiusa, come nel caso delle orbite planetarie, la costanza della velocità areolare implica che:

$$\frac{dA}{dt} = \text{cost} = \frac{A}{T} \Rightarrow \frac{A}{T} = \frac{L}{2m}$$

Con A l'area contenuta nella traiettoria chiusa. Il periodo T , pertanto, è:

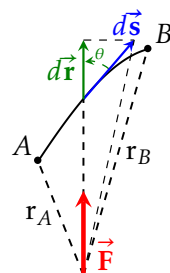
$$T = \frac{2m}{L} A \quad (5.2)$$

5.1.2 Lavoro delle forze centrali

Le forze centrali sono *conservative*. Dato che $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ è parallela ad r , il lavoro è:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r) \hat{u}_r \cdot d\vec{s} \quad (5.3)$$

$$W = \int_A^B F(r) d\vec{r} = F(r_B) - F(r_A) \quad (5.4)$$

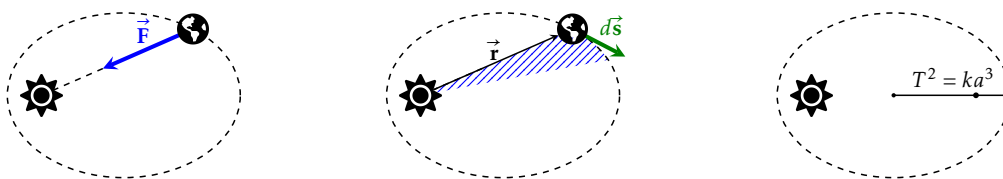


Il lavoro dipende solo dalle coordinate del punto iniziale e finale e *non* dal percorso fatto.

5.2 LEGGI DI GRAVITAZIONE DI KEPLERO

Isaac Newton, nel 1666, ipotizzò che la caduta dei gravi ed il moto dei corpi celesti fossero regolati dalle stesse leggi. Ricavò dunque la *legge di gravitazione universale*, basandosi sulle osservazioni di *Tycho Brahe* e sulle **leggi di Keplero**:

1. I pianeti si muovono su **orbite ellittiche** di cui il **Sole** occupa uno dei **fuochi**.
2. I pianeti si muovono con **velocità areolare costante**.
3. I **quadrati** dei **periodi di rivoluzione** sono *proporzionali* ai **cubi** delle **distanze medie** dal Sole.



Approssimiamo un'orbita come circolare. Se la velocità areolare è costante il moto del pianeta è *circolare uniforme*:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost}$$

Se r è costante, lo è anche la velocità angolare. La forza che causa il moto è *centripeta* e deve valere:

$$F = F_N = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2 m r}{T^2}$$

Per la terza legge di Keplero vale che $\frac{T^2}{r^3} = k = \text{cost}$, dunque la forza esercitata dal Sole sui pianeti è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole:

$$F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}$$

Considerato il sistema Terra-Sole, la forza esercitata dal Sole sulla Terra e viceversa sono, rispettivamente:

$$F_{S,T} = \frac{4\pi^2 m_T}{k_T r^2} \quad F_{T,S} = \frac{4\pi^2 m_S}{k_S r^2}$$

Se le relazioni appena viste valgono per qualsiasi coppia di corpi, le due forze devono essere uguali in modulo:

$$\frac{4\pi^2 m_T}{k_T r^2} = \frac{4\pi^2 m_S}{k_S r^2} \Rightarrow \frac{m_S}{k_S} = \frac{m_T}{k_T} \Rightarrow m_S k_T = m_T k_S$$

La **legge di gravitazione universale** di Newton descrive una forza tra due masse qualsiasi m_1 e m_2 , negativa ed attrattiva:

$$\vec{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2} \quad (5.5)$$

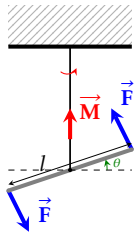
Definiamo la **costante di gravitazione universale** $\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_S} = \frac{4\pi^2}{m_S k_T}$. La sua dimensione è $[\gamma] = [L^3 M^{-1} T^{-2}]$ e vale $\gamma = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} = 6,67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$. La ricaviamo analiticamente eguagliando per un corpo sulla Terra la forza di gravitazione e la forza

peso e dai parametri dell'orbita lunare:

$$F = \gamma \frac{m_T m}{r^2} = mg \Rightarrow g = \gamma \frac{m_T}{r^2}$$

$$F_{T,L} = \gamma \frac{m_T m_L}{r_L^2} = m_L \omega_L^2 r_L$$

5.2.1 Misura di γ con la bilancia di torsione di Cavendish



La **bilancia di Cavendish** è un sistema molto sensibile che ruota con due masse agli estremi. Poste delle masse in prossimità degli estremi della bilancia, possiamo misurare la variazione di angolo dovuto al momento della forza. In questo modo con i ragionamenti precedenti troviamo il valore di γ .

5.2.2 Legge gravitazionale sulla superficie terrestre

Nella legge gravitazionale le masse sono legate all'**interazione gravitazionale**. Sulla superficie terrestre possiamo quindi ragionare così:

$$m_I g = \gamma \frac{m_G m_{TG}}{r_T^2} \Rightarrow g = \frac{m_{TG}}{r_T^2} \frac{m_G}{m_I}$$

Indicando con m_I la massa dell'interazione gravitazionale, m_G la massa del generico corpo e m_{TG} quella della Terra. Sperimentalmente si è verificato che g è indipendente dai corpi, il che implica che $\frac{m_G}{m_I}$ è costante (ovvero sono proporzionali o eguali, non dipendenti dai materiali con cui i corpi son fatti).

ESERCIZIO. Si osserva che un pianeta ha un satellite che ruota con orbita circolare di raggio $1,5 \times 10^5$ km. Il periodo di rotazione T è di 12 giorni. Da questi dati posso trovare la massa del pianeta?

SVOLGIMENTO: Sì, poiché se il moto è circolare uniforme deve valere la stessa relazione scritta per il sistema Terra-Luna.

$$F_{P,S} = \gamma \frac{m_P m_S}{r_{PS}^2} = m_S \omega_S^2 r_{PS} \Rightarrow m_P = \frac{\omega_S^2 r_{PS}^3}{\gamma}$$

Sostituendo il valore $m_P = \frac{4\pi^2/T^2 r_{PS}^3}{\gamma} = 1,86 \times 10^{24}$ kg.

5.3 CAMPO GRAVITAZIONALE

Dalla legge di gravitazione universale possiamo riorganizzare i termini, ottenendo:

$$\vec{F}_{1,2} = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_{12} \right) m_2 \quad \vec{F}_{2,1} = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_{21} \right) m_1$$

Possiamo dunque vedere la forza come generata da una massa e misurata con una massa campione. Definiamo quindi il **campo gravitazionale** generato dalla massa m_i come:

$$G_i = -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \hat{u}_i \quad (5.6)$$

Vale il **principio di sovrapposizione**: se G_i è il campo dell' i -esima massa sommo vettorialmente e trovo il campo totale in un generico punto P :

$$G(P) = \sum_{i=1}^n \left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{u}}_i \right) \quad (5.7)$$

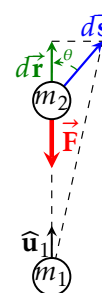
Possiamo rappresentare graficamente i campi con le **linee di forza**:

- Il vettore del campo ha la *direzione* della *tangente* alla linea di forza in ogni punto.
- Iniziano e finiscono sulle “**sorgenti**” del campo.
- La loro **densità** è proporzionale all'intensità del campo.
- La loro **distribuzione** nello spazio in genere rispecchia le “simmetrie” delle sorgenti.

5.4 ENERGIA POTENZIALE DEL CAMPO GRAVITAZIONALE

Troviamo il lavoro del campo gravitazionale partendo dalla definizione:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_A^B \left[-\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \right] \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \\ &= \int_A^B \left[-\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \right] dr \\ W_{AB} &= -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) = E_{P,A} - E_{P,B} \end{aligned} \quad (5.8)$$



Definiamo quindi l'**energia potenziale gravitazionale**:

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad (5.9)$$

Se lo spostamento è tra due posizioni con stessa distanza da m_1 , ad esempio con orbite circolari, il lavoro è $W = 0$.

Esiste inoltre una relazione tra forza ed energia potenziale gravitazionale:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \right) &= F(r) \\ F(r) &= \frac{dE_p}{dr} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Per una *distribuzione continua*, invece:

$$W(r) = -m \int \frac{\gamma}{r} dm \quad (5.11)$$

La forza di Newton è corretta solo se m ha una distribuzione di massa *sferica* o se è *puntiforme*, altrimenti vale per gli elementi dm .

Nei sistemi *legati* $E_{tot} < 0$, ovvero:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{M m}{r} < 0 \quad (5.12)$$

Infatti, sia data una massa m che orbita circolarmente attorno ad un corpo di massa M fissa nell'origine di un sistema di riferimento inerziale. Allora vale:

$$\begin{aligned}
 E_p(\mathbf{r}) &= -\gamma \frac{Mm}{r} \\
 F_{1,2} = F_N &\Rightarrow \gamma \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r \Rightarrow \gamma \frac{Mm}{r} = m\omega^2 r^2 \\
 E_k &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma Mm}{r} \\
 E_{tot} &= \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} \frac{\gamma Mm}{r} - \gamma \frac{Mm}{r} \\
 E_{tot} &= -\frac{1}{2} \frac{\gamma Mm}{r} < 0
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Questa relazione trovata vale per tutti i sistemi legati.

SI può anche dimostrare che, per un'orbita qualsiasi:

$$E = -\frac{(Mm)^2}{M+m} \frac{\gamma^2}{2J^2} (1 - e^2) \tag{5.14}$$

Con J il momento angolare ed e l'eccentricità dell'orbita: essa è $0 < e < 1$ per l'ellisse ($E < 0$), $e = 0$ per la circonferenza ($E < 0$), $e = 1$ per la parabola ($E = 0$), $e > 1$ per l'iperbole ($E > 0$).

5.5 VELOCITÀ DI FUGA

Qual è la velocità iniziale, detta **velocità di fuga**, per fare uscire un corpo dal campo gravitazionale, ovvero raggiungere l'*infinito* dove $G = 0$? Per conservazione dell'energia meccanica si ha:

$$\frac{1}{2}mv_F^2 - \gamma \frac{m_T m}{r_T} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

La velocità all'infinito che ci basta per uscire è nulla, quindi:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}mv_F^2 &= \gamma \frac{m_T m}{r_T} \\
 v_F &= \sqrt{2\gamma \frac{m_T}{r_T}} = 11,2 \text{ km/s} = 40 \times 10^3 \text{ km/h}
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

DINAMICA IV: SISTEMI DI PUNTI

“Punto! Due punti! ...ma sì, fai vedere che abbondiamo...”

Totò, pittore puntinista

6.1 DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI

FINORA ABBIAMO SEMPRE lavorato con un singolo punto, il *punto materiale*. Generalizziamo ora le leggi della dinamica, applicandole ad un **sistema di punti**.

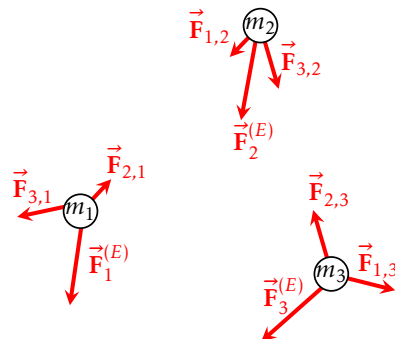
Consideriamo n punti di massa $m_1, \dots, m_i, m_j, \dots, m_n$ interagenti fra loro e con l'ambiente esterno. La forza \vec{F}_i agente sull' i -esimo punto è data dalla risultante delle *forze esterne* $\vec{F}_i^{(E)}$ agenti sul punto e dalle *forze interne* $\vec{F}_i^{(I)}$ al sistema esercitate dagli $n - 1$ punti:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} \quad (6.1)$$

- **FORZE ESTERNE:** sono dovute all'interazione tra il sistema e il mondo esterno
- **FORZE INTERNE:** sono forze scambiate tra i punti, di qualunque tipo (tensioni, forze elastiche, elettriche-magnetiche, gravitazionali, ...)

Per le forze interne vale che $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$.

In genere la risultante delle *forze interne* agenti sull' i -esimo punto *non* è nulla, *ma* la risultante di tutte le forze interne è **nulla**, poiché per il principio di azione-reazione le forze interne sono *a due a due* uguali e opposte.



$$\vec{R}^{(I)} = 0 \quad (6.2)$$

La somma vettoriale di tutte le forze è quindi:

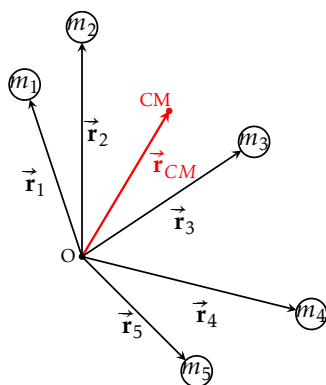
$$\vec{R} = \vec{R}^{(I)} + \vec{R}^{(E)} = \vec{R}^{(E)} = \sum_i \vec{F}_i^{(E)} \quad (6.3)$$

Per ciascun punto P possiamo definire in un sistema di riferimento inerziale la posizione \vec{r}_i , velocità \vec{v}_i , quantità di moto $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, accelerazione $\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m_i}$, momento angolare $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ ed energia cinetica $E_{k_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$.

Per il sistema complessivo possiamo definire le seguenti grandezze:

- **Massa totale:** $m = \sum_i m_i$.
- **Quantità di moto totale:** $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$.
- **Momento angolare totale:** $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$.
- **Energia cinetica totale:** $E_k = \sum_i E_{k_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$.

6.2 CENTRO DI MASSA



Il **centro di massa** CM di un sistema di punti materiali è il *punto geometrico* individuato dal raggio vettore \vec{r}_{CM} :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + \dots + m_n} \quad (6.4)$$

\vec{r}_{CM} risulta essere la media pesata rispetto alle masse del sistema dei raggi vettori rispetto all'origine del sistema di riferimento. Si può esprimere in componenti:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \quad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \quad (6.5)$$

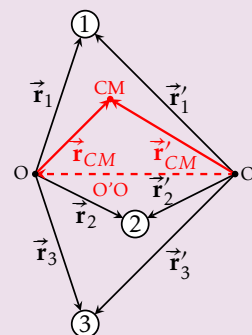
ATTENZIONE!

La posizione fisica del centro di massa rispetto ai punti *non* dipende dal sistema di riferimento, mentre le coordinate *variano* con il sistema di riferimento. Infatti, fissato un secondo sistema di origine O' , si ha che il raggio vettore dell' i -esimo punto P rispetto al sistema di O' :

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \overrightarrow{O'O} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'_{CM} &= \frac{\sum_i m_i \vec{r}'_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\vec{r}_i + \overrightarrow{O'O})}{\sum_i m_i} = \\ &= \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} + \frac{m}{m} \overrightarrow{O'O} = \vec{r}_{CM} + \overrightarrow{O'O} \end{aligned}$$

$$\vec{r}'_{CM} = \vec{r}_{CM} + \overrightarrow{O'O} \quad (6.7)$$



ESEMPIO. Dati $P_1(3, -2, 0)$, $P_2(-2, 4, -2)$, $P_3(3, -2, 0)$ di masse rispettivamente $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 3$ kg, $m_3 = 2$ kg, trovare il centro di massa.

SVOLGIMENTO:

$$\begin{aligned}x_{CM} &= \frac{1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{1 + 2 + 3} = \frac{3 - 6 + 6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\y_{CM} &= \frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2}{1 + 2 + 3} = \frac{-2 + 12 - 4}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\z_{CM} &= \frac{1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0}{1 + 2 + 3} = \frac{0 - 6 + 0}{6} = -\frac{6}{6} = -1\end{aligned}$$

Possiamo studiare la variazione nel tempo del centro di massa degli n punti, e dunque la sua velocità:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \right) = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{\mathbf{m}}$$

Pertanto vale la relazione:

$$\vec{P} = \mathbf{m} \vec{v}_{CM} \quad (6.8)$$

La *quantità di moto totale* coincide con la *quantità di moto del centro di massa*, visto come punto materiale che ha posizione \vec{r}_{CM} , velocità \vec{v}_{CM} e massa pari alla massa totale del sistema \mathbf{m} .

Studiamo ora la variazione della velocità del centro di massa:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{CM} &= \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{\mathbf{m}} = \frac{\sum_i (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)})}{\mathbf{m}} \\ \mathbf{m} \vec{a}_{CM} &= \sum_i \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \vec{F}_i^{(I)} = \vec{R}^{(I)} + \vec{R}^{(E)} = \vec{R}^{(E)} \\ \vec{R}^{(E)} &= \mathbf{m} \vec{a}_{CM}\end{aligned} \quad (6.9)$$

Il centro di massa si sposta come un punto materiale in cui si concentra la massa a cui è applicata la risultante delle forze. Inoltre:

$$\begin{aligned}\vec{R}^{(E)} = \mathbf{m} \vec{a}_{CM} &= \mathbf{m} \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{m} \vec{v}_{CM}) = \frac{d\vec{P}}{dt} \\ \vec{R}^{(E)} &= \frac{d\vec{P}}{dt}\end{aligned} \quad (6.10)$$

La risultante delle forze esterne è pari alla variazione della quantità di moto. In un insieme di punti soggetti solo alla gravità il moto del centro di massa è:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{g \sum_i m_i}{\sum_i m_i} = g$$

6.3 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Per le considerazioni precedenti, abbiamo che:

$$\vec{R}^{(E)} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{m} \vec{v}_{CM} = \text{cost} \quad (6.11)$$

“Se la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale è costante e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o è in quiete.”

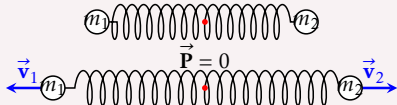
Se consideriamo due punti isolati che interagiscono solo tra loro:

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = m_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = \text{costante} \quad (6.12)$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2) = \frac{d}{dt} (m_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{v}}_2) = m_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{a}}_2 = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{F}}_1 = -\vec{\mathbf{F}}_2$$

Le forze che si esercitano tra i due punti sono uguali di modulo e verso opposto.

OSSERVAZIONE.



Nel caso dell'immagine il centro di massa è fisso. In questo caso si ha che la quantità di moto è nulla ($\vec{\mathbf{P}} = 0$). Se le masse sono in movimento in modo che CM sia fisso, si ha:

$$m_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = 0 \Rightarrow m_2 = -m_1 \frac{\vec{\mathbf{v}}_1}{\vec{\mathbf{v}}_2} \quad (6.13)$$

In questo caso la massa è definita dinamicamente indipendentemente dalla forza peso.

6.4 CENTRO DI MASSA E MOMENTO ANGOLARE

Facciamo dei ragionamenti analoghi a quelli fatti in precedenza. Al momento consideriamo il polo O fisso.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{L}}_i &= \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i \\ \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i &= \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}} \\ \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i + \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \\ &= \underbrace{\sum_i \vec{\mathbf{v}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i}_{=0} + \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times (\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}) = \\ &= \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} + \sum_{i,j} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_{i,j} = \vec{\mathbf{M}}^{(E)} + \vec{\mathbf{M}}^{(I)} \end{aligned}$$

Ma:

$$\vec{\mathbf{M}}_{i,j}^{(I)} = \vec{\mathbf{r}}_j \times \vec{\mathbf{F}}_{i,j} + \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_{j,i} = \vec{\mathbf{r}}_j \times \vec{\mathbf{F}}_{i,j} - \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_{i,j} = (\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_i) \times \vec{\mathbf{F}}_{i,j} = \vec{\mathbf{r}}_{i,j} \times \vec{\mathbf{F}}_{i,j}$$

Ma $\vec{\mathbf{r}}_{i,j} \parallel \vec{\mathbf{F}}_{i,j}$, quindi:

$$\vec{\mathbf{M}}^{(I)} = 0 \quad (6.14)$$

6.5 TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

Se il polo O è fisso, l'evoluzione nel tempo del momento angolare del sistema di punti è determinato dal momento delle forze esterne rispetto ad O . E se O si muove di velocità costante $\vec{\mathbf{v}}_0$?

$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times m \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} \times m \vec{\mathbf{v}}_i + \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times m \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt}$$

Ma $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OP}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0$, dato che si muovono sia O sia P_i . Allora:

$$\begin{aligned} \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i &= \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}) = \\ &= \underbrace{\sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}_{=0} - \sum_i \vec{v}_0 \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}) = \\ &= - \sum_i (\vec{v}_0 \times m_i \vec{v}_i) + \vec{M}^{(E)} + \underbrace{\vec{M}^{(I)}}_{=0} = -\vec{v}_0 \times \sum_i (m_i \vec{v}_i) + \vec{M}^{(E)} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}^{(E)} - \vec{v}_0 \times m\vec{v}_{CM} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Questa è l'espressione del **teorema del momento angolare per un sistema di punti** con polo O che si muove con velocità \vec{v}_0 .

Se O coincide con CM , $\vec{v}_0 = \vec{0}$, $\vec{v}_{CM} = \vec{0}$ oppure $\vec{v}_0 // \vec{v}_{CM}$ allora $\vec{v}_0 \times m\vec{v}_{CM} = 0$. In tutti questi casi allora segue che $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$ come visto prima.

6.6 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)} = 0 \quad (6.16)$$

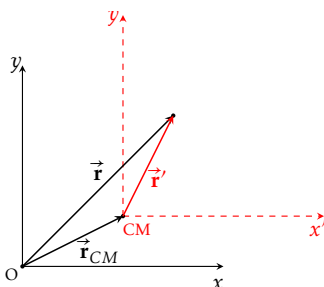
Questo è vero se:

- Non agiscono forze esterne, ovvero se è un *sistema isolato*. In questo caso $\vec{M} = 0$ per qualsiasi polo O per cui valgono $\vec{v}_0 \times m\vec{v}_{CM} = 0$.
- Il sistema non è isolato, ma $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)}$ è comunque 0. In questo caso $\vec{M} = 0$ rispetto ad un polo O ma non rispetto a qualsiasi polo; si conserva solo nel dato polo.

6.7 SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Il **sistema di riferimento del centro di massa** $CMx'y'$ ha come *origine* il centro di massa, mentre i suoi assi sono fissi nella direzione degli assi del sistema Oxy inerziale. Esso *non è inerziale*, ma **traslatorio**. Dunque, la relazione tra il raggio vettore \vec{r} nel sistema Oxy e il raggio vettore \vec{r}' nel sistema $Ox'y'$ è la seguente:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{CM} \quad (6.17)$$



Se non ci sono rotazioni del sistema ($\omega = 0$), la velocità \vec{v} in Oxy e quella \vec{v}' nel sistema del centro di massa sono così definite:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{CM} \quad (6.18)$$

Nel sistema del centro di massa si ha:

$$\begin{cases} O' = CM \\ \vec{\mathbf{r}}'_{CM} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}'_i = 0 \\ \vec{\mathbf{v}}'_{CM} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}'_i = 0 \\ \vec{\mathbf{a}}'_{CM} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}'_i = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

Pertanto, anche la quantità di moto totale è nulla nel sistema del centro di massa.

$$\vec{\mathbf{P}}' = \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}'_i = 0 \quad (6.20)$$

La forza complessiva nel secondo sistema risulta:

$$\vec{\mathbf{F}}' = \mathbf{m} \vec{\mathbf{a}}' = \mathbf{m} (\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}}_{CM}) = \vec{\mathbf{F}} - \mathbf{m} \vec{\mathbf{a}}_{CM} \quad (6.21)$$

Mentre la forza che agisce su ogni punto si può esprimere come:

$$\vec{\mathbf{F}}'_i = m_i \vec{\mathbf{a}}'_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} - m_i \vec{\mathbf{a}}_{CM} \quad (6.22)$$

Sommando su tutti i punti:

$$\sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}'_i = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} - \left(\sum_i m_i \right) \vec{\mathbf{a}}_{CM} = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} - \mathbf{m} \vec{\mathbf{a}}_{CM} = 0 \quad (6.23)$$

Il risultato è 0, essendo $\vec{\mathbf{a}}'_{CM} = 0$ e quindi $\sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}'_i = 0$.

Si può dimostrare che:

- Il momento risultante è uguale al momento delle forze esterne senza il contributo di forze inerziali: $\vec{\mathbf{M}}'^{(E)} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}'_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$
- Il teorema del momento angolare sussiste per il sistema non inerziale del centro di massa purché CM sia il polo rispetto a cui si calcolano i momenti: $\frac{d\vec{\mathbf{L}}'}{dt} = \vec{\mathbf{M}}'^{(E)}$

6.8 I TEOREMA DI KÖNIG (PER IL MOMENTO ANGOLARE)

Il **I teorema di König** fornisce una relazione tra il momento angolare misurato nel sistema inerziale e in quello del centro di massa. Il momento rispetto al sistema inerziale è:

$$\vec{\mathbf{L}}_0 = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

Con:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_{CM} + \vec{\mathbf{r}}'_i \\ \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}_{CM} + \vec{\mathbf{v}}'_i \end{cases}$$

Riscrivendo:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{L}}_0 &= \sum_i (\vec{\mathbf{r}}_{CM} + \vec{\mathbf{r}}'_i) \times m_i (\vec{\mathbf{v}}_{CM} + \vec{\mathbf{v}}'_i) = \\ &= \underbrace{\vec{\mathbf{r}}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_{CM}}_{=\vec{\mathbf{P}}} + \underbrace{\vec{\mathbf{r}}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}'_i}_{=0} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}'_i \times \vec{\mathbf{v}}_{CM}}_{=0} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}'_i \times \vec{\mathbf{v}}'_i}_{=\vec{\mathbf{L}}'} \\ \vec{\mathbf{L}}_0 &= \vec{\mathbf{r}}_{CM} \times \vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{L}}' = \vec{\mathbf{L}}_{CM} + \vec{\mathbf{L}}' \end{aligned} \quad (6.24)$$

Definiamo il **momento angolare del centro di massa**

$$\vec{\mathbf{L}}_{CM} = \vec{\mathbf{r}}_{CM} \times \vec{\mathbf{P}} \quad (6.25)$$

6.9 II TEOREMA DI KÖNIG (PER L'ENERGIA CINETICA)

Il **II teorema di König** fornisce una relazione tra l'energia cinetica misurata nel sistema inerziale e in quello del centro di massa. L'energia cinetica rispetto al sistema inerziale è:

$$E_{CIN} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Con:

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i \\ \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i \end{cases}$$

Riscrivendo:

$$E_{CIN} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \sum_i (v_{CM} + v'_i)^2 = \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2}_{=E_{CM}} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{=E'_{CIN}} + \underbrace{\sum_i m_i v_{CM} v'_i}_{=0}$$

$$E_{CIN} = E_{CM} + E'_{CIN} \quad (6.26)$$

DINAMICA V: URTI

“Adoro colpire le persone. Mi piace.”

MIKE TYSON, *fisico degli urti*

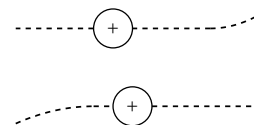
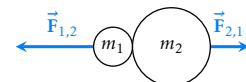
7.1 URTI

UN URTO è un evento *isolato* nel quale una forza relativamente *intensa* agisce per un tempo relativamente *breve* su due o più corpi *in contatto tra loro*. Ciò può essere come:

- Risultato di un **contatto fisico**.
- Risultato di un'interazione tra particelle.

Per le forze interne vale che $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$.

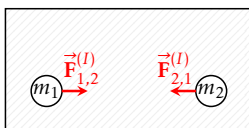
In genere la risultante delle forze interne agenti sull'*i*-esimo punto *non* è nulla, ma la risultante di tutte le forze interne è **nulla**, poiché per il principio di azione-reazione le forze interne sono *a due a due* uguali e opposte.



Le forze che agiscono, nel caso di un urto, per un tempo breve, sono chiamate **forze impulsive**.

Gli urti si suddividono in *urti elastici* e *urti anelastici*; la differenza fondamentale fra i due è legata a cosa succede nell'interazione fra gli oggetti. Per fare ciò studiamo cosa succede prima, dopo e durante l'urto all'energia e alla quantità di moto.

7.2 QUANTITÀ DI MOTO E URTI



In un sistema isolato ($\vec{F}^{(E)} = 0$) due oggetti di massa m_1 e m_2 si incontrano. Su di essi agiscono le forze interne $\vec{F}_{12}^{(I)}$ e $\vec{F}_{21}^{(I)}$, che possono essere di *tipo conservativo* e di *tipo non conservativo*.

Abbiamo visto che, in un sistema isolato, la **quantità di moto si conserva** (sez. 6.3, pag. 71). Pertanto:

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{costante} \quad (7.1)$$

Questo vale sia per urti elastici, sia per urti anelastici. Se analizziamo la velocità del centro di massa:

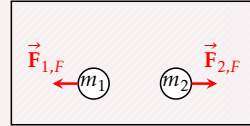
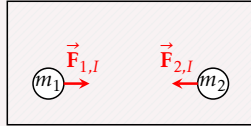
$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} \quad (7.2)$$

$$\vec{P} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM} \quad (7.3)$$

Essendo \vec{P} costante, anche la velocità del centro di massa necessariamente è costante (cioè $\vec{v}_{CM} = \text{costante}$).

Nel sistema del centro di massa, essendo $\vec{v}'_{CM} = 0$, allora $\vec{P}' = 0$.

OSSERVAZIONE. Cosa significa che $\vec{P} = \text{costante}$?



Date le condizioni prima e dopo l'urto qui mostrate, possiamo scriverne le corrispettive quantità di moto:

$$\vec{P}_I = m_1 \vec{v}_{1,I} + m_2 \vec{v}_{2,I} \quad \vec{P}_F = m_1 \vec{v}_{1,F} + m_2 \vec{v}_{2,F}$$

Poiché $\vec{P}_I = \vec{P} = \vec{P}_F$, si ha:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_{1,I} + m_2 \vec{v}_{2,I} &= m_1 \vec{v}_{1,F} + m_2 \vec{v}_{2,F} \\ m_1 \vec{v}_{1,F} - m_1 \vec{v}_{1,I} &= -(m_2 \vec{v}_{2,F} - m_2 \vec{v}_{2,I}) \\ \Delta \vec{P}_1 &= -\Delta \vec{P}_2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Pertanto \vec{P} si conserva, ma $-\Delta \vec{P}_1 \neq 0 \neq \Delta \vec{P}_2$, cioè ci sono delle variazioni della quantità di moto degli oggetti *senza* esserci variazioni di quella del sistema.

7.3 ENERGIA CINETICA NEGLI URTI

Sappiamo che l'energia cinetica totale, misurata nel sistema inerziale, risulta:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Per il secondo teorema di König, possiamo anche esprimerla come:

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 + E'_k$$

L'energia cinetica del centro di massa è $\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2$: essa *non* varia se vale la conservazione della quantità di moto. Invece, l'energia cinetica dei due punti rispetto al centro di massa è E'_k .

Non ci è dato sapere a priori se le forze interne sono conservative oppure no. Durante l'urto la *posizione* dei corpi *non* cambia, pertanto non varia l'energia potenziale fra prima e dopo l'urto ($\Delta E_p = 0$). Segue che:

$$\Delta E_M = \Delta E_k \quad (7.5)$$

$$E'_k = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (7.6)$$

E'_k può rimanere costante o variare a seconda delle forze interne.

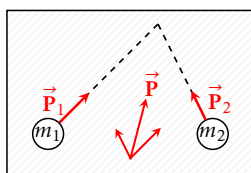


Figura 7.1: Sistema del laboratorio

Le velocità dei due corpi possiamo esprimerle come:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_{CM}$$

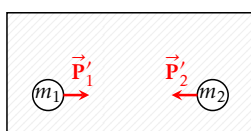


Figura 7.2: Sistema del centro di massa

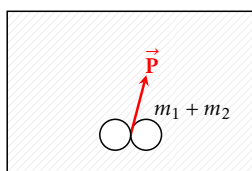
Nel sistema del centro di massa $\vec{\mathbf{P}}' = 0$, dunque:

$$m_1 \vec{\mathbf{v}}'_{1,I} + m_2 \vec{\mathbf{v}}'_{2,I} = m_1 \vec{\mathbf{v}}'_{1,F} + m_2 \vec{\mathbf{v}}'_{2,F} \quad (7.7)$$

$$\vec{\mathbf{P}}_{1,I} = -\vec{\mathbf{P}}_{2,I} \quad \vec{\mathbf{P}}_{1,F} = -\vec{\mathbf{P}}_{2,F} \quad (7.8)$$

Nel sistema del centro di massa i punti si vedono arrivare con quantità di moto *uguali in modulo e opposte in verso*.

7.4 URTO COMPLETAMENTO ANELASTICO



L'**urto completamente anelastico** è un particolare tipo di urto in cui i punti restano *attaccati* dopo l'urto, formando *un unico corpo puntiforme* di massa $m_1 + m_2$.

$$\vec{\mathbf{P}} = m_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = (m_1 + m_2) \vec{\mathbf{v}}_F = (m_1 + m_2) \vec{\mathbf{v}}_{CM} \quad (7.9)$$

I punti si muovono l'istante dopo l'urto con la velocità che aveva il centro di massa un istante prima dell'urto. La quantità di moto che varia per ogni massa equivale a:

$$\Delta \vec{\mathbf{P}}_i = m_i \vec{\mathbf{v}}_{CM} - m_i \vec{\mathbf{v}}_i \quad (7.10)$$

Prima dell'urto, l'energia cinetica è:

$$E_{K,I} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \stackrel{\text{König}}{=} \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 + E'_{K,I}$$

Con $E'_{K,I}$ l'energia cinetica nel sistema del centro di massa. Dopo l'urto, essa diventa:

$$E_{K,F} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E_{K,I}$$

In questo caso, dato che il sistema è diventato quello del sistema del centro di massa, $\vec{\mathbf{v}}'_{CM} = 0$, e dunque $E'_{K,F} = 0$. La differenza di energia cinetica prima e dopo l'urto è, dunque:

$$\Delta E_K = E_{K,F} - E_{K,I} = -E'_{K,I} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (7.11)$$

Notiamo che $E'_{K,I}$ è energia dissipata, dato che i due corpi, per potersi unire in uno, devono necessariamente deformarsi in modo permanente. Le forze interne sono dunque *non conservative*.

In generale, in un **urto anelastico**:

- \vec{P} si conserva.
- E_K non si conserva.

7.4.1 Pendolo balistico

Possiamo valutare la velocità di un proiettile usando gli urti anelastici attraverso il cosiddetto **pendolo balistico**.

Esso consiste in un *blocco*, posto ad un'altezza di riferimento zero, che funge da peso di un pendolo: sparando il proiettile nel blocco esso si *conficcherà* nel blocco e il corpo ora unito si sposterà con il *moto del pendolo*.

Per *conservazione* dell'energia meccanica, l'energia cinetica iniziale si trasformerà, nel picco del moto, in *pura energia potenziale*: misurando l'altezza che raggiunge il blocco possiamo dunque calcolare la velocità del proiettile.

Il blocco m_2 inizialmente è fermo, mentre il proiettile m_1 si muove con velocità \vec{v}_1 . Dopo l'urto, abbiamo un unico corpo $m_1 + m_2$ che si muove con velocità \vec{v}_F . La quantità di moto prima e dopo l'urto si conserva, dunque:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 &= (m_1 + m_2) \vec{v}_F \\ \vec{v}_F &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \end{aligned}$$

Dopo la collisione, il blocco con proiettile incorporato oscilla, raggiungendo un'altezza h rispetto alla posizione di equilibrio. Per conservazione dell'energia meccanica:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)gh &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_F^2 = \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)}v_1^2 \\ v_1 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh} \end{aligned} \quad (7.12)$$

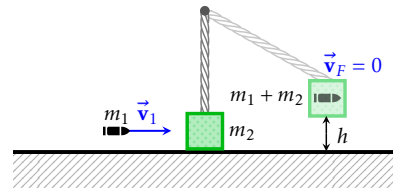
7.5 URTO ELASTICO

In un **urto elastico** le forze interne sono *conservative*, pertanto l'energia cinetica nel sistema si *conserva*:

$$\begin{cases} \vec{P}_I = \vec{P}_F \\ E_{K,I} = E_{K,F} \end{cases} \quad (7.13)$$

Studiamo il caso unidimensionale.

$$\begin{aligned} \vec{P}_I = \vec{P}_F &\Rightarrow m_1 \vec{v}_{1,I} + m_2 \vec{v}_{2,I} = m_1 \vec{v}_{1,F} + m_2 \vec{v}_{2,F} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM} \\ E_{K,I} = E_{K,F} &\Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1,I}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,I}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,F}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,F}^2 \\ v_{1,F} &= \frac{(m_1 - m_2)v_{1,I} + 2m_2 v_{2,I}}{m_1 + m_2} \quad v_{2,F} = \frac{2m_1 v_{1,I} + (m_1 - m_2)v_{2,I}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (7.14)$$



Nel centro di massa:

$$\begin{cases} \vec{v}'_{1,F} = -\vec{v}'_{1,I} \\ \vec{v}'_{2,F} = -\vec{v}'_{2,I} \end{cases} \quad (7.15)$$

Velocità e quantità di moto rimangono invariate in modulo, ma cambiano il verso.

DIMOSTRAZIONE.

$$\vec{v}'_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{v}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}'_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow \sum_i m_i \vec{v}'_i = 0 \Rightarrow m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = 0$$

Poiché $\vec{P}' = \text{costante} = 0$, segue che:

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}'_{1I} + m_2 \vec{v}'_{2I} = m_1 \vec{v}'_{1F} + m_2 \vec{v}'_{2F} = 0 \\ \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1I} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2I} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1F} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2F} \end{cases} \quad \begin{cases} v'_{1I} = \frac{m_2}{m_1} v'_{2I} \\ v'_{1F} = \frac{m_2}{m_1} v'_{2F} \end{cases}$$

Sostituendo nel sistema precedente:

$$\begin{aligned} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 v'^2_{2I} + m_2 v'^2_{2I} &= m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 v'^2_{2F} + m_2 v'^2_{2F} \\ \left[m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 + m_2 \right] v'^2_{2I} &= \left[m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 + m_2 \right] v'^2_{2F} \\ v'^2_{2I} &= v'^2_{2F} \\ \begin{cases} v'_{2I} = -v'_{2F} \\ v'_{1I} = -v'_{1F} \end{cases} \end{aligned}$$

ESEMPIO. Un neutrone di massa m_1 urta elasticamente colpisce un nucleo atomico di massa m_2 . Come diminuisce percentualmente l'urto nei casi:

- PIOMBO ($A = 206$)
- CARBONIO ($A = 12$)
- IDROGENO ($A = 1$)

SVOLGIMENTO:

$$\begin{aligned} E_{K,1I} &= \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1I} & E_{K,2F} &= E_{K,1I} - E_{K,1F} = \frac{1}{2} m v'^2_{2F} \\ v_{2F} &= \frac{2m_1 v_{1I} + (m_1 - m_2) v_{2I}}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1I} \\ E_{K,2F} &= \frac{1}{2} m_2 \frac{4m_1^2 v'^2_{1I}}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{K,1I} \\ \frac{E_{K,2F}}{E_{K,1F}} &= \frac{E_{K,1I} - E_{K,1F}}{E_{K,1F}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{K,1I} \end{aligned}$$

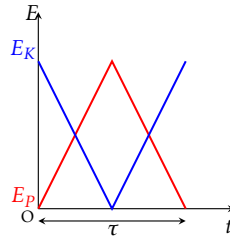
- $m_2 = 206m_1$ $\% = \frac{4 \cdot 206}{(207)^2} = 0,02 = 2\%$
- $m_2 = 12m_1$ $\% = \frac{4 \cdot 12}{(13)^2} = 0,28 = 28\%$
- $m_2 = m_1$ $\% = \frac{4 \cdot 1}{(2)^2} = 1 = 100\%$

7.5.1 Durante l'urto

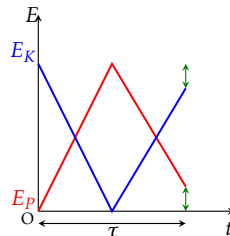
In un urto, i legami tra gli atomi possiamo immaginarli come delle molle. Se il fenomeno è elastico, si conserva l'energia meccanica, con l'energia potenziale data dalla compressione superficiale degli atomi.

$$E_M = E_P + E_K = \frac{1}{2}kx^2 + E_K \quad (7.16)$$

Con $x = a - b$. In un piccolo periodo τ , questa energia meccanica rimane costante nel complesso, ma energia potenziale e cinetica variano nel seguente modo.



Se si verifica un fenomeno di dissipazione di energia, ovvero nel caso di un urto anelastico, un po' di energia potenziale rimane imprigionata nel reticolo come calore o deformazione.



DINAMICA VI: CORPO RIGIDO

“Finché il mondo gira e gira, avremo le vertigini e faremo errori.”

MEL BROOKS, *girovago errante*

8.1 CORPO RIGIDO

UN CORPO RIGIDO è un sistema di punti, intesi complessivamente come **oggetto esteso**, in cui le *distanze relative* non cambiano.

Le *forze interne* hanno le seguenti caratteristiche:

- RISULTANTE DELLE FORZE INTERNE NULLA: $\vec{\mathbf{R}}^{(I)} = 0$
- LAVORO DELLE FORZE INTERNE NULLO: $W^{(I)} = 0$
- MOMENTO DELLE FORZE INTERNE NULLO: $\vec{\mathbf{M}}^{(I)} = 0$

Le *forze esterne*, invece, sono responsabili del moto del centro di massa:

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} = m\vec{\mathbf{a}}_{CM} \quad (8.1)$$

Esse sono anche responsabili delle rotazioni intorno all'origine con i *momenti delle forze*:

$$\vec{\mathbf{M}}_O^{(E)} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_O}{dt} = \sum \frac{d}{dt} (\vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i) \quad (8.2)$$

Inoltre fanno variare l'*energia cinetica del sistema*:

$$W_{A \rightarrow B}^{(E)} = E_{K,B} - E_{K,A} \quad (8.3)$$

8.1.1 Densità del corpo rigido

Un corpo rigido si può vedere come un **insieme continuo** di punti materiali. Pertanto, è coerente poter ragionare sia con il termine finito della massa m , sia l'elemento infinitesimo dm . Introduciamo il concetto di **densità volumica**:

$$\rho_V = \frac{dm}{dV} \quad (8.4)$$

La *dimensione* della densità volumica è $[\rho_V] = [ML^{-3}]$. L'unità di misura del SI è kg/m^3 (leggasi: "chilogrammo a metro cubo").

La *massa totale* si può esprimere per integrazione:

$$m = \int dm = \int_V \rho_V dV \quad (8.5)$$

Integrare il volume significa studiarne la **distribuzione volumetrica**, ovvero la **forma** del corpo. Pertanto, risulterà comodo sfruttare, se possibile, le *simmetrie* dei volumi.

Se la densità è costante:

$$\rho_V = \frac{m}{V} \quad m = \rho_V V$$

DIGRESSIONE. Possiamo definire la **densità superficiale**:

$$\rho_S = \frac{dm}{dS} \quad (8.6)$$

La *dimensione* della densità superficiale è $[\rho_S] = [ML^{-2}]$. L'unità di misura del SI è kg/m^2 (leggasi: "chilogrammo a metro quadro").

La *massa totale* si può esprimere per integrazione:

$$m = \int dm = \int_S \rho_S dS \quad (8.7)$$

In modo analogo definiamo la **densità lineare**:

$$\rho_l = \frac{dm}{dl} \quad (8.8)$$

La *dimensione* della densità lineare è $[\rho_l] = [ML^{-1}]$. L'unità di misura del SI è kg/m (leggasi: "chilogrammo al metro").

La *massa totale* si può esprimere per integrazione:

$$m = \int dm = \int_l \rho_l dl \quad (8.9)$$

8.2 CENTRO DI MASSA DEL CORPO CONTINUO

Il *centro di massa* del corpo continuo è:

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\int_V \vec{\mathbf{r}} dm}{\int dm} = \frac{\int_V \vec{\mathbf{r}} dm}{m} = \frac{\int_V \vec{\mathbf{r}} \rho_V dV}{m} \quad (8.10)$$

Se ρ_V è costante:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}_{CM} &= \frac{\int_V \vec{\mathbf{r}} \rho_V dV}{m} = \frac{\rho_V}{m} \int_V \vec{\mathbf{r}} dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{\mathbf{r}} dV \\ \vec{\mathbf{r}}_{CM} &= \frac{1}{V} \int_V \vec{\mathbf{r}} dV \end{aligned} \quad (8.11)$$

In quest'ultimo caso, la posizione del centro di massa CM è la *media* della *funzione vettoriale* $\vec{\mathbf{r}}(x, y, z)$ nel volume V . Essa dipende dalla massa e dalla forma del corpo.

Se un corpo è *simmetrico*, il centro di massa coincide con il *centro di simmetria* oppure è un punto dell'*asse/piano di simmetria*.

8.2.1 Forza peso e centro di massa

Su ogni singolo dm agisce la forza peso $d\vec{F} = \vec{g}dm$. La *forza peso* complessiva risulta:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int \vec{g}dm = \vec{g} \int dm = m\vec{g} \quad (8.12)$$

Il *momento della forza peso* rispetto al polo fisso è data da:

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{g}dm = \left(\int \vec{r}dm \right) \times \vec{g}$$

Poichè $\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}dm}{\int dm} \Rightarrow \int \vec{r}dm = \vec{r}_{CM} \int dm$, si ha che:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \left(\vec{r}_{CM} \int dm \right) \times \vec{g} = m\vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{g} \\ \vec{M} &= \vec{r}_{CM} \times m\vec{g} \end{aligned} \quad (8.13)$$

8.2.2 Energia potenziale e centro di massa

Applichiamo la definizione di energia potenziale come integrale:

$$E_P = \int gzdm = g \int zdm$$

Poichè $z_{CM} = \frac{\int zdm}{m} \Rightarrow \int zdm = z_{CM} \int dm$, si ha che:

$$\begin{aligned} E_P &= gz_{CM} \int dm = mgz_{CM} \\ E_P &= mgz_{CM} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Se il corpo è libero e agisce solo la forza peso, la *traiettoria* è *verticale rettilinea* o *parabolica* a seconda delle condizioni iniziali.

8.3 MOTO DEL CORPO RIGIDO

Grazie alle osservazioni precedenti, possiamo concentrarci sullo *spostamento globale*, il quale è il moto del centro di massa. I vari punti del corpo rigido descrivono traiettorie diverse, dovuti a due tipi di moti:

$$\left. \begin{array}{l} \text{moto di traslazione} \\ \text{moto di rotazione} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{moto di rototraslazione}$$

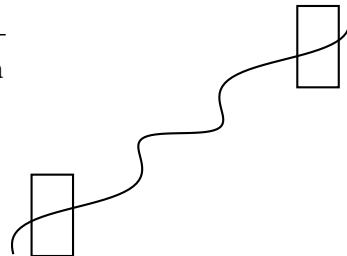
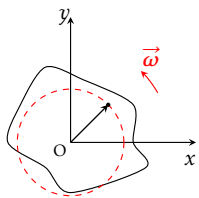
8.3.1 *Traslazione*

In una **traslazione**, tutti i punti descrivono *traiettorie uguali* (generalmente curvilinee), percorse tutte con la stessa velocità $\vec{v} = \vec{v}_{CM}$.

- QUANTITÀ DI MOTO: $\vec{P} = m\vec{v}_{CM}$
- ENERGIA CINETICA: $E_K = E_{K,CM} = 1/2 m\vec{v}_{CM}^2$
- MOM. ANGOLARE: $\vec{L} = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$

L'equazione caratteristica del moto traslatorio è:

$$\vec{R} = \vec{R}^{(E)} = m\vec{a}_{CM} \quad (8.15)$$

8.3.2 *Rotazione*

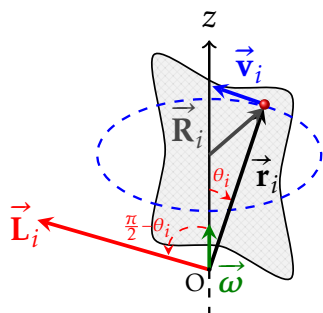
In una **rotazione**, tutti i punti descrivono un *moto circolare*: le *traiettorie* sono *archi di circonferenze* su piani tra loro *paralleli* e hanno *centro* sull'*asse di rotazione*.

I punti hanno tutti la stessa *velocità angolare* $\vec{\omega}$, mentre la velocità \vec{v}_i dipende dalla *distanza* \vec{R}_i dall'asse di rotazione.

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i \quad (8.16)$$

L'equazione caratteristica del moto rotazionale è:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (8.17)$$

8.3.3 *Rotazioni intorno ad un asse fisso*

In una rotazione, i punti dell'asse sono fissi e possono essere usati come poli per il *calcolo dei momenti*.

Il **vettore velocità angolare** $\vec{\omega}$ ha:

- DIREZIONE: asse di rotazione (fisso)
- VERSO: verso della rotazione (dato dalla mano destra)
- MODULO: variabile

Se $\vec{\omega}$ varia, allora il **vettore accelerazione angolare** $\vec{\alpha} \neq 0$, ed è descritto da:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} \quad (8.18)$$

Il vettore $\vec{\alpha}$ è parallelo all'asse di rotazione.

Definita la distanza di un punto dall'asse di rotazione in funzione del raggio vettore dal polo:

$$R_i = r_i \sin \theta_i \quad (8.19)$$

Il momento angolare di P_i rispetto al polo O è:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m\vec{v}_i \quad (8.20)$$

- È ortogonale al piano individuato da \vec{r}_i e \vec{v}_i , ovvero $\vec{L}_i \perp \vec{r}_i, \vec{v}_i$
- Forma un angolo $\pi/2 - \theta_i$ con l'asse z .
- Ha modulo $L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega$

La proiezione sull'asse z è il **momento angolare assiale**:

$$L_{i,z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin \theta_i = m_i R_i \omega \underbrace{r_i \sin \theta_i}_{=R_i} = m_i R_i^2 \omega$$

$$L_{i,z} = m_i R_i^2 \omega \quad (8.21)$$

8.4 MOMENTO DI INERZIA

Definiamo, in termini finiti, il **momento di inerzia** del corpo rispetto all'asse di rotazione:

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (8.22)$$

Pertanto, la proiezione del momento angolare su z risulta:

$$L_z = \sum_i (m_i R_i^2) \omega = I_z \omega \quad (8.23)$$

Il momento di inerzia dipende dalle *masse* e dalla loro *posizione* rispetto all'asse; inoltre, dipende dalla *forma* del corpo e dalla *posizione* dell'asse rispetto al corpo.

8.4.1 Componente ortogonale del momento angolare

La componente ortogonale del momento angolare all'asse di rotazione in generale *non* è nulla, ma è data dalla somma vettoriale dei termini:

$$L_{i,\perp} = L_i \cos \theta_i = m_i r_i R_i \cos \theta_i \quad (8.24)$$

Se l'asse di rotazione *coincide* con un asse di simmetria del corpo, \vec{L}_{\perp} è *nullo*, poiché per ogni \vec{L}_i esiste un \vec{L}_j simmetrico rispetto all'asse. Allora, se $\vec{L}_{\perp} = 0$, $\vec{L} = \vec{L}_{//}$; pertanto, $\vec{L} = I_z \vec{\omega}$, e quindi \vec{L} è parallelo a $\vec{\omega}$.

DIGRESSIONE. Nel caso generale in cui $\vec{L}_{\perp} \neq 0$ si ha un moto intorno all'asse di rotazione detto **moto di precessione**, come quello della *trottola*.

8.4.2 Equazione del moto del corpo rigido

Dalle considerazioni precedenti:

$$\begin{cases} \vec{L} = I_z \vec{\omega} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha} \\ \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{M} = I_z \vec{\alpha} \quad (8.25)$$

$\vec{\alpha}$ e \vec{M} sono paralleli all'asse di rotazione, ovvero paralleli a $\vec{\omega}$.

OSSERVAZIONE. I_z si chiama momento di **inerzia** poiché, come la massa, corrisponde alla “resistenza” del corpo a ruotare. A differenza della massa, tuttavia, il momento di inerzia dipende dalla distribuzione di massa rispetto all’asse di rotazione; la massa è invece una proprietà fondamentale dei corpi, indipendente dai sistemi di riferimento.

Esprimendo $\vec{\alpha} = \frac{\vec{M}}{I_z}$, possiamo ricavare per integrazione le formule della velocità angolare e dell’angolo spazzato rispetto al tempo. Nel caso particolare $\vec{M} = 0$, il corpo è in quiete o si sta muovendo con moto circolare uniforme, mentre se $\vec{M} = \text{costante}$ il corpo è in moto circolare uniformemente accelerato.

8.4.3 Energia cinetica in rotazione

L’energia cinetica del corpo rigido in moto di rotazione è:

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{L^2}{2I_z}$$

$$E_K = \frac{L^2}{2I_z} \quad (8.26)$$

8.4.4 Lavoro in rotazione

Il lavoro compiuto da un corpo in rotazione, per teorema dell’energia cinetica, risulta:

$$W = \Delta E_K = \frac{1}{2} I_z \omega_F^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_I^2 \quad (8.27)$$

In termini infinitesimali:

$$dW = dE_K = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = M_z d\theta$$

Allora il lavoro risulta, per integrazione:

$$W = \int_0^\theta M_z d\theta \quad (8.28)$$

Se $\vec{L} // \vec{\omega}$:

$$W = \int_0^\theta M d\theta \quad (8.29)$$

La potenza istantanea, invece:

$$P = \frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\theta}{dt} = M_z \omega \quad (8.30)$$

8.4.5 Momento di inerzia nel corpo continuo

Otteniamo i risultati analoghi per il corpo continuo con l’integrazione:

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = \int \rho (x^2 + y^2) dV \quad (8.31)$$

8.4.6 Teorema di Huyghens-Steiner

“Il momento di inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova ad una distanza a dal centro di massa del corpo è dato dalla seguente legge:

$$I = I_C + ma^2 \quad (8.32)$$

con I_C il momento di inerzia calcolato rispetto all'asse passante per il centro di massa.”

DIMOSTRAZIONE. Si considerano due assi z e z' paralleli e distanti a . L'asse z' passa per il centro di massa. Allora le coordinate dei due sistemi risultano:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' + a \\ z = z' \end{cases}$$

Rispetto all'asse z (polo O), il momento di inerzia risulta:

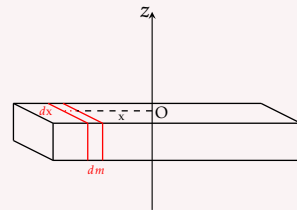
$$\begin{aligned} I_z &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i (x_i'^2 + (y' + a)^2) = \\ &= \underbrace{\sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)}_{=I_z'=I_c} + \underbrace{\sum_i m_i a^2}_{=ma^2} + \underbrace{2a \sum_i m_i y'}_{=y'_{CM}=0} = I_C + ma^2 \end{aligned}$$

8.5 CASI PARTICOLARI DI MOMENTI DI INERZIA

ESEMPIO. ASTA OMOGENEA.

Prendiamo inizialmente il caso con l'asse di simmetria passante per il centro di massa. Data lunghezza d , sezione S e densità ρ , la massa m dell'asta si può esprimere come:

$$m = \rho S d$$



Mentre la controparte infinitesimale come:

$$dm = \rho S dx$$

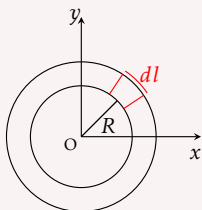
Con x la distanza dall'asse di simmetria. Per definizione, allora:

$$\begin{aligned} I_Z &= \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dm = \rho S \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx = \frac{1}{12} \rho S d^3 = \frac{1}{12} m d^2 \\ I_Z &= \frac{1}{12} m d^2 \end{aligned} \quad (8.33)$$

Se l'asse è in un estremo dell'asta:

$$I_Z = \int_0^d x^2 dm = \rho S \int_0^d x^2 dx = \frac{1}{3} \rho S d^3 = \frac{1}{3} m d^2$$

$$I_Z = \frac{1}{3} m d^2 \quad (8.34)$$

ESEMPIO. ANELLO OMOGENEO.

Calcoliamo rispetto ad un asse passante per il centro dell'anello e ortogonale al piano dell'anello. Dato il raggio R dell'anello e densità lineare ρ_l , la massa m si può esprimere come:

$$m = \rho_l 2\pi R$$

Mentre la controparte infinitesimale come:

$$dm = \rho_l dl$$

Con dl arco infinitesimo. Per definizione, allora:

$$I_Z = \int R^2 dm = \rho_l \int R^2 dl = \rho_l R^2 \int dl = \rho_l R^2 2\pi R = mR^2$$

$$I_Z = mR^2 \quad (8.35)$$

ESEMPIO. GUSCIO CILINDRICO.

Calcoliamo rispetto ad un asse passante per il centro del guscio e ortogonale alla base. Si può vedere come un insieme di anelli sovrapposti. Posto allora la massa degli anelli m_i , segue che:

$$I_Z = \sum_i m_i R^2 = mR^2 \quad (8.36)$$

ESEMPIO. CILINDRO OMOGENEO.

Calcoliamo rispetto ad un asse passante per il centro del cilindro e ortogonale alla base. Si può vedere come una serie di gusci cilindrici, arrotolati uno sull'altro. Data l'altezza L , il raggio R e densità ρ , la massa m del cilindro si può esprimere come:

$$m = \rho V = \rho L \pi R^2$$

Mentre la controparte infinitesimale come:

$$dm = \rho dV = \rho L 2\pi r dr$$

Con r la distanza dall'asse di simmetria. Per definizione, L allora:

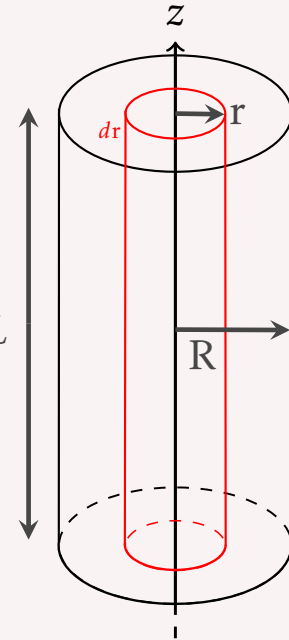
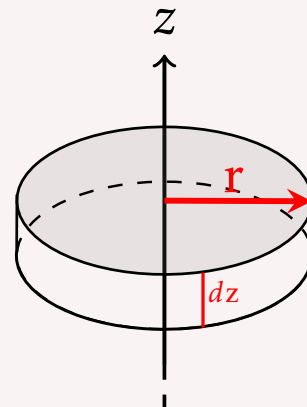
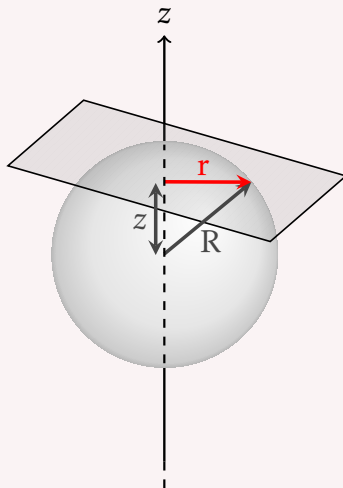
$$\begin{aligned} dI_Z &= r^2 dm \\ I_Z &= \int_0^R dI_Z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho L 2\pi r dr = \\ &= \rho L 2\pi \int_0^R r^3 dr = \rho L 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \rho L 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

$$I_Z = \frac{1}{2} m R^2 \quad (8.37)$$

Se l'asse è tangente al cilindro, per il Teorema di Huyghens-Steiner:

$$I_Z = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

$$I_Z = \frac{3}{2} m R^2 \quad (8.38)$$

**ESEMPIO. SFERA OMOGENEA.**

Prendiamo un asse passante per il centro della sfera. Per definire dm prendiamo tanti piani perpendicolari all'asse di simmetria che intersecano all'altezza z dall'origine la

sfera di massa M_{sfera} e raggio R : essi definiscono una serie di cilindri di raggio r (tale che $r^2 = R^2 - z^2$), densità ρ (che coincide con quella della sfera, essendo omogenea) e altezza infinitesimale dz . Allora la massa infinitesimale è:

$$dm = \rho \pi r^2 dz$$

Per definizione, allora:

$$dI_Z = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz$$

Ed essendo $r^4 = (r^2)^2 = (R^2 - z^2)^2$:

$$\begin{aligned} I_Z &= \int_{-R}^R dI_Z = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi \left[R^4 z - 2R^2 \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]_{-R}^R = \frac{1}{2} \rho \pi \left[2R^5 - 4R^2 \frac{R^3}{3} + \frac{2R^5}{5} \right] = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 \end{aligned}$$

Ma essendo:

$$\rho = \frac{M_{sfera}}{V_{sfera}} = \frac{M_{sfera}}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

Allora:

$$I_Z = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{8}{15} \frac{M_{sfera}}{\frac{4}{3} \pi R^3} \pi R^5 = \frac{2}{5} M_{sfera} R^2$$

$$I_Z = \frac{2}{5} M_{sfera} R^2 \quad (8.39)$$

III

DINAMICA DELLA MATERIA

INTRODUZIONE ALLA DINAMICA DELLA MATERIA

“Vedo che il tuo sforzo è grosso come il mio. Ora fammi vedere come lo maneggi bene.”

LORD CASCO, fisico della materia

9.1 MATERIA

LA MATERIA, dal punto di vista macroscopico, è presente in tre **stati**:

- **SOLIDO**: hanno *forma e volume ben definiti*.
- **LIQUIDO**: assumono la forma del *contenitore* ma, idealmente, sono *incomprimibili* (volume costante).
- **GASSOSO**: *non hanno* forma e volume ben definiti.

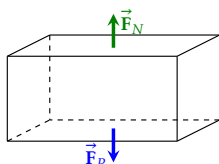
Ci concentreremo principalmente sullo studio degli ultimi due stati, che possiamo definire come stato **fluidico**. Tuttavia, diamo comunque alcuni cenni riguardo lo studio dei solidi, che ci serviranno in seguito.

9.2 SFORZO

Possiamo definire su un solido lo **sforzo**:

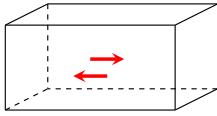
$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (9.1)$$

Esso è una grandezza *scalare* che riguarda la deformazione di un'area di un corpo. La *dimensione* dello sforzo è $[\sigma] = [ML^{-1}T^{-2}]$. L'unità di misura del SI è Pa (leggasi: “pascal”) o N/m^2 (leggasi: “newton al metro quadro”).



- Se le forze sono *uscanti*, parliamo di **trazione**.
- Se le forze sono *entrantanti*, parliamo di **compressione**.

In questi due casi indichiamo lo sforzo di trazione/compressione con σ_t (con *t* per “traction”, *trazione*).



- Se le forze sono *parallele all'area*, parliamo di **taglio**.
In questo caso lo sforzo si indica con σ_s (con *s* per “sheer”, *taglio*).

Se supponiamo che *tutte* le forze stiano *comprimendo* il solido, parliamo allora di **pressione**:

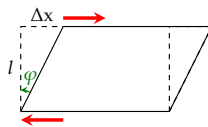
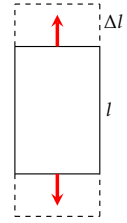
$$P = \frac{F}{A} \quad (9.2)$$

9.2.1 Deformazioni

Gli sforzi generano delle *deformazioni*. Per semplificarne lo studio, supponiamo di avere un corpo abbastanza regolare di lunghezza l .

Nel caso della *trazione/compressione*, possiamo quantificare la deformazione misurando la variazione della lunghezza dovuto allo sforzo rispetto alla lunghezza in quiete:

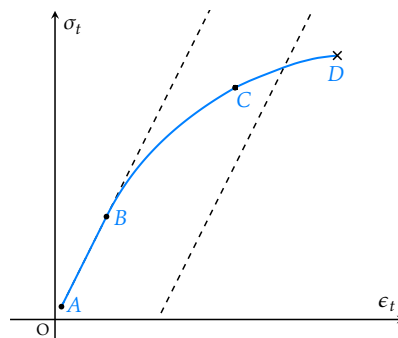
$$\varepsilon_t = \frac{\Delta l}{l} \quad (9.3)$$



Nel caso dello sforzo di *taglio*, possiamo definire la deformazione sull'angolo dell'inclinazione formata dalla deformazione.

$$\varepsilon_s = \varphi \approx \frac{\Delta x}{l} \quad (9.4)$$

Rappresentiamo sul piano cartesiano lo sforzo σ_t in funzione della deformazione ε_t .



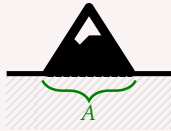
All'aumentare dello sforzo, notiamo alcune proprietà:

- Tra A e B, il **rapporto** è *lineare* e la **deformazione** è *elastica*.
- Tra B e C, il **rapporto** *non* è lineare, ma rimane una **deformazione** *elastica*.
- Tra C e D, viene superato il *limite di elasticità* e la **deformazione** risulta *plastica*, ovvero permanente.
- Dopo D, il corpo supera il *limite di frattura* e si **rompe**.

La regione compresa tra il limite di elasticità e la frattura si chiama **regione di plasticità**. Poichè nel tratto $A \rightarrow B$ il rapporto è lineare, possiamo descriverlo con la legge:

$$\sigma_t = Y \varepsilon_t \quad (9.5)$$

Con Y il **modulo di Young**, una costante analoga alla *costante elastica* vista nella *legge di Hooke* (sez. 3.6.3, pag. 42).

ESEMPIO.

Qual è l'altezza massima che una montagna può avere sulla Terra? Una montagna esercita, a causa della gravitazione, una forza peso $F = mg = \rho Vg$ sulla superficie terrestre e, dunque, fa subire ad essa uno sforzo sull'area A su cui si appoggia:

$$\sigma_t = \frac{F}{A} = \frac{\rho Vg}{A}$$

Con $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ la densità del granito di cui è costituita la montagna e V il volume di essa. Assumendo la montagna come cono ($V = \frac{1}{3}hA$), sostituendo nello sforzo:

$$\sigma_t = \frac{\rho Vg}{A} = \frac{\rho \frac{1}{3}hAg}{A} = \frac{1}{3}\rho gh$$

Se lo sforzo è troppo alto ($\sigma_{t,max} = 10^8 \text{ Pa}$), la base granitica su cui si poggia potrebbe non reggere. L'altezza massima permessa è quindi:

$$h_{max} = \frac{3\sigma_{t,max}}{\rho g} = 11326 \text{ m}$$

Sulla Terra non è possibile avere montagne più alte di circa 11326 m: la montagna più alta, il *monte Everest*, risulta infatti di 8848 m.

Tuttavia, poiché l'accelerazione di gravità varia su altri pianeti, supponendo sempre base e montagne granitiche è possibile avere altezze massime differenti. Ad esempio, su Marte ($g_M = 5,7 \text{ m/s}^2$), l'altezza massima è:

$$h_{max} = \frac{3\sigma_{t,max}}{\rho g_M} \approx 30 \text{ km}$$

Su Marte possiamo avere montagne molto più alte di quelle terrestri, come il *monte Olimpo*, un vulcano dall'altezza di 26km. Il monte Olimpo marziano è anche la montagna più alta dell'intero Sistema Solare!

9.2.2 Compressione e comprimibilità

Data la pressione P , introduciamo una nuova grandezza, il **modulo di compressione**:

$$B = -V \frac{dP}{dV} \quad (9.6)$$

Da cui possiamo definire, se P è costante, il **coefficiente di comprimibilità**:

$$K_T = \frac{1}{B} = -\frac{1}{P} \frac{dV}{V} \quad (9.7)$$

Il coefficiente di comprimibilità dell'acqua è $K_{H_2O} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}$

ESEMPIO. La comprimibilità dell'acqua influisce sulla profondità degli oceani. Supponiamo di studiare la pressione causata da una colonna d'acqua ad una profondità h .

$$P(h) = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho hAg}{A} = \rho gh$$

Dalla definizione di coefficiente di comprimibilità possiamo ricavare la variazione

dell'altezza causata dalla compressione:

$$K_{H_2O} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dh} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dh} = -\frac{1}{P} \frac{dh}{h}$$

$$dh = -K_{H_2O} h P$$

Passando alle differenze finite:

$$\Delta h = -K_{H_2O} h P$$

Volendo fare un conto approssimato, prendiamo la pressione media $\langle \bar{P} \rangle$ calcolata alla profondità media degli oceani $\bar{h} = 3800$ m, ovvero:

$$\langle \bar{P} \rangle = \frac{P(\bar{h})}{2} = \frac{1}{2} \rho g \bar{h}$$

Allora la variazione risulta:

$$|\Delta h| = K_{H_2O} \bar{h} \frac{1}{2} \rho g \bar{h} = 5 \cdot 10^{-10} \cdot 3800 \cdot \frac{3800 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{2} = 35,4 \text{ m}$$

Cosa significa questo valore? Poiché la comprimibilità dell'acqua è maggiore di zero, l'acqua si può comprimere. Tuttavia, poiché questa comprimibilità è molto piccola, con altezze piccole il liquido *sembra* incompressibile; con altezze elevate come quelle degli oceani, l'effetto è più *sentito*.

Dai calcoli trovati, la profondità degli oceani è di circa 35 m *meno profonda* rispetto a quanto non sarebbe se l'acqua fosse incompressibile (ovvero, se $K_{H_2O} = 0$ allora $|\Delta h| = 0$).

IDROSTATICA

“Frederick: *Che lavoro schifoso!*

Igor: *Potrebbe esser peggio.*

Frederick: *E come?!*

Igor: *Potrebbe piovere!”*

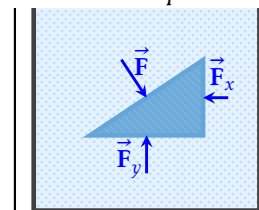
FRANKENSTEIN JUNIOR

10.1 PRINCIPIO DI ISOTROPIA DI PASCAL

INIZIEREMO STUDIANDO ciò che definiamo i **fluidi ideali**, un modello di fluido *incomprimibile* ($K_T = 0$) e *non viscoso*, trascurando dunque alcun tipo di fenomeno *dissipativo*.

In un contenitore pieno di fluido ideale si ha un prisma regolare in quiete, come in figura. Su di esso agiscono delle forze causate dal fluido; poiché il prisma è in quiete, la somma vettoriale delle forze deve essere pari a zero:

$$\vec{F} + \vec{F}_x + \vec{F}_y = 0$$



Con \vec{F} la forza complessiva applicata sulla faccia “dell’ipotenusa”, mentre $F_x = F \cos \theta$ e $F_y = F \sin \theta$ le forze applicate sulle altre facce. Data l’area A su cui viene applicata \vec{F} , possiamo ricavare la faccia $A_x = A \cos \theta$ su cui è applicata F_x e $A_y = A \sin \theta$ quella su cui è applicata F_y .

La pressione dovuta al liquido, che dipende da queste forze, risulta essere:

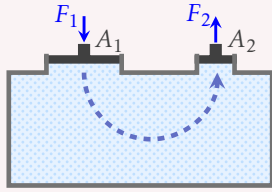
$$\frac{F_x}{A_x} = \frac{F_y}{A_y} = \frac{F}{A} = P$$

La pressione che agisce sul prisma è costante su ogni faccia. Possiamo enunciare quindi il **principio di isotropia di Pascal**:

“La pressione applicata a un fluido statico incompressibile racchiuso in un recipiente si trasmette inalterata in ogni punto del fluido.”

Si parla dunque di pressione **isotropa**.

10.1.1 Il torchio idraulico

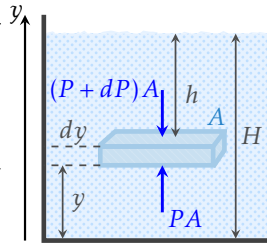
ESEMPIO. TORCHIO IDRAULICO.

Il **torchio idraulico** è un'applicazione diretta del principio di isotropia di Pascal. Supponiamo un sistema come in figura, il cui liquido è incompressibile: se applichiamo su A_1 una forza F_1 , su A_2 avremo una forza F_2 proporzionale a F_1 .

$$\frac{F_1}{A_1} = P = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

10.2 LEGGE DI STEVINO

Prendiamo un piccolo *elemento di fluido* (idealizzato come parallelepipedo) in equilibrio, posto ad altezza y dal fondo, di spessore infinitesimale dy e area A . La pressione al livello y è P , mentre al livello $y + dy$ è $P + dP$. Il fluido dunque esercita *dal basso* una forza $F = PA$, mentre *dall'alto* la forza $F = (P + dP)A$. Dall'alto dobbiamo inoltre considerare anche la forza peso $F_p = gdm$. Essendo il corpo in equilibrio, la risultante deve essere *nulla*:



$$PA - (P + dP)A - gdm = 0$$

Essendo $dm = \rho dV = \rho A dy$, si ha:

$$PA - (P + dP)A - g\rho A dy = 0$$

$$dP = -g\rho dy$$

Integrando per un'altezza qualsiasi y e la corrispondente pressione P :

$$\int_{P_0}^P dP = - \int_0^y g\rho dy$$

$$P = P_0 - g\rho y$$

Se prendiamo il livello del liquido H (rispetto al fondo), la pressione ad altezza H è:

$$P(H) = P_0 - g\rho H = P_a$$

Con P_a la **pressione atmosferica**. Dunque $P_0 = P_a + g\rho H$. Ad una certa profondità $h = H - y$, la pressione esercitata dal liquido risulta:

$$P(h) = P_a + g\rho H - g\rho y = P_a + g\rho(H - y) = P_a + g\rho h$$

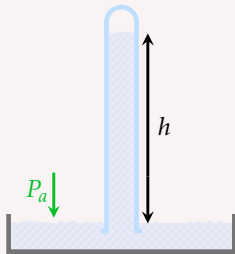
$$P(h) = P_a + g\rho h \quad (10.1)$$

Possiamo intuitivamente vedere questo risultato come dovuto dal "peso" dell'aria e della colonna di fluido fino alla profondità h .

Questa equazione prende il nome di **legge di Stevino**:

"La pressione in un fluido incompressibile aumenta linearmente con la profondità, ovvero dipende solo dalla quantità di liquido e non dalla forma che assume."

10.2.1 Pressione atmosferica

ESEMPIO. BAROMETRO DI TORRICELLI.

Con il **barometro di Torricelli** possiamo calcolare la pressione atmosferica. Si supponga un apparato come in figura. Ci è nota la densità del fluido ρ , mentre possiamo misurare l'altezza h , rispetto alla base della vasca, del liquido nella colonnina. Possiamo supporre che la pressione alla sommità della colonna è zero ($P_{a,col} \approx 0$). Per la legge di Stevino, la pressione alla base della colonnina è:

$$P = P_{a,col} + \rho gh \approx \rho gh$$

Tuttavia, essa è la stessa pressione che l'atmosferica esercita sulla base della vaschetta, pertanto:

$$P_a = \rho gh$$

Dobbiamo dunque misurare l'altezza h per poter calcolare la pressione atmosferica. Se il liquido fosse acqua ($\rho_{H_2O} = 10^3 \text{ kg/m}^3$), il valore di h sarebbe troppo grande per essere misurato con questo dispositivo. Invece, prendendo come liquido il mercurio ($\rho_{Hg} = 13.579 \text{ kg/m}^3$), questa altezza è perfettamente misurabile e quindi possiamo calcolare la pressione atmosferica.

La pressione può essere valutata con molte unità di misura diverse, oltre al pascal:

- MILLIMETRI DI MERCURIO (mmHg) o TORR (torr), basata sul barometro di Torricelli.
- BAR (bar), nata per motivi meteorologici.
- ATMOSFERA (atm), basata sulla pressione atmosferica al livello del mare.

$$1 \text{ atm} = 1013 \text{ mbar} = 750 \text{ mmHg} = 750 \text{ tor} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad (10.2)$$

10.2.1.1 Pressione atmosferica e altitudine

La legge di Stevino, se ρ è costante, deriva dall'equazione differenziale:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g$$

Se ρ non è costante, come nel caso dell'atmosfera che varia con l'altitudine, possiamo scrivere la pressione in funzione della densità con l'**equazione di stato**:

$$P = K\rho \quad (10.3)$$

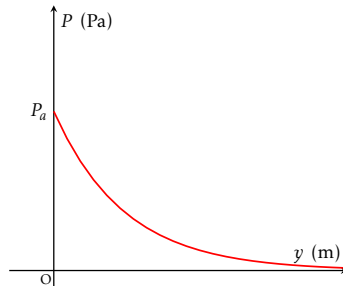
Con $K = \text{cost.}$ Allora la legge di Stevino diventa:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= -\frac{P}{K}g \\ \int \frac{dP}{P} &= -\int \frac{g}{K} dy \\ \log P &= -\frac{g}{K}y + C \end{aligned}$$

Scegliamo C tale per cui $e^C = P_a = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, in modo che per $y = 0$ la pressione coincida con la pressione atmosferica nota al livello del mare.

$$P = P_a e^{-\frac{g}{K}y} \quad (10.4)$$

Più si sale, più la pressione atmosferica diminuisce con velocità esponenziale; la pressione, in generale, può essere dettata da una **funzione ipsometrica**.



10.3 PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Prendiamo una *porzione di un fluido* in quiete; sappiamo che su di esso agiscono forze (in tutte le direzioni) dovute alla *pressione del resto del fluido*:

$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \sum_i P_i dA$$

Inoltre, la porzione di fluido subisce *verso il basso* la sua *forza peso*. Poiché è *in quiete*, la somma vettoriale delle forze agente su di esso deve essere pari a *zero*:

$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i + \vec{\mathbf{F}}_P = 0$$

La risultante delle forze di pressione del fluido devono *controbilanciare* la forza peso. Immergendo un oggetto, le forze di pressioni esercitate sull'oggetto sono le stesse applicate sulla porzione di fluido spostato. Questo è enunciato dal **principio di Archimede**:

“Un corpo immerso riceve una spinta verso l’alto uguale al peso del fluido spostato”

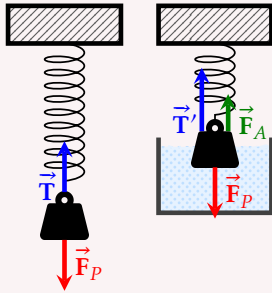
$$\vec{\mathbf{F}}_A = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = -\vec{\mathbf{F}}_{P,FL} \quad (10.5)$$

$$\vec{\mathbf{F}}_A = \sum_i F_i = -m_F Lg = -\rho_F L V g \quad (10.6)$$

Indichiamo questa spinta verso l’alto F_A con il nome di **forza di Archimede**.

- Se $\rho_{fl} > \rho_{ogg}$, $F_A > F_P$ e quindi il corpo *galleggia*.
- Se $\rho_{fl} < \rho_{ogg}$, $F_A < F_P$ e quindi il corpo *sprofonda*.

ESEMPIO. Le navi *galleggiano* grazie alla forza di Archimede. Esse presentano al loro interno grandi *cavità* piene d’aria che permettono di *spostare grandi quantità* di fluido *pur non aumentando* notevolmente la propria massa. In questo modo ricevono una forza di Archimede abbastanza elevata da poter supportare la forza peso e galleggiare.

ESEMPIO.**BILANCIA IDROSTATICA.**

Con la **bilancia idrostatica**, possiamo calcolare la densità di oggetti particolari. Ponendo l'oggetto attaccato ad una molla, allo stato di quiete la tensione della molla è pari alla forza peso dell'oggetto, ovvero:

$$T = F_p = \rho_{ogg} V g$$

Se questo apparato viene immerso in un liquido, la tensione della molla ora risulta minore a causa della forza di Archimede che agisce sul corpo:

$$T' = F_p - F_A = \rho_{ogg} V g - \rho_{fl} V g$$

Il rapporto fra le due tensioni risulta:

$$\frac{T'}{T} = \frac{\rho_{ogg} V g - \rho_{fl} V g}{\rho_{ogg} V g} = \frac{\rho_{ogg} - \rho_{fl}}{\rho_{ogg}}$$

$$\rho_{ogg} = \frac{T}{T - T'} \rho_{fl}$$

ESEMPIO. L'ESPERIMENTO DI ARCHIMEDE. Il principio di Archimede nasce in seguito alla necessità di determinare la *composizione di una corona*, apparentemente d'oro puro, che era stata commissionata dal tiranno Gerone II ad un orefice. Infatti, il sovrano sospettava che una parte della corona fosse stata prodotta con una *lega* di oro e *argento*, un metallo "vile".

La corona pesava nell'aria, $F_{p,aria} = 5 \text{ kg}_P$, mentre nell'acqua $F_{p,H_2O} = 4,7 \text{ kg}_P$ (con kg_P indichiamo i **chilogrammi peso**, un'unità alternativa di misura della *forza*). Note le densità dell'oro $\rho_{Au} = 19,3 \text{ g/cm}^3$ e dell'argento $\rho_{Ag} = 10,5 \text{ g/cm}^3$, sappiamo che la forza di Archimede è:

$$F_A = F_{p,aria} - F_{p,H_2O} = \rho V g$$

Inoltre, il volume V lo possiamo vedere come la somma del volume in oro e in argento:

$$V = V_{Au} + V_{Ag} = \frac{F_A}{\rho g}$$

Allo stesso modo la forza peso in aria si può scomporre per materiale:

$$F_{p,aria} = \rho_{Au} V_{Au} g + \rho_{Ag} V_{Ag} g$$

Dalle ultime due equazioni ricaviamo che $V_{Au} = 89,9 \text{ cm}^3$ e $V_{Ag} = 210,2 \text{ cm}^3$, mentre $V = 300 \text{ cm}^3$. La percentuale d'oro era il 70%, mentre quella dell'argento il 30%, pertanto la corona non era d'oro puro come fu spacciata dall'orefice!

10.3.1 *Il principio di Archimede in rotazione*

Consideriamo un elemento di fluido mentre il fluido *gira* attorno ad un *asse*; supponiamo inoltre di escludere *dal computo* delle forze la forza peso. Se questa porzione è a *distanza*

costante dall'asse di rotazione, le forze di pressione devono controbilanciare la *forza centrifuga*.

$$F_A = F_C$$

Mettendo al posto della porzione di fluido un *oggetto*, le forze totali che agiscono su di esso risultano:

$$F = F_C - F_A = \rho_{ogg} V \omega^2 r - \rho_{fl} V \omega^2 r = (\rho_{ogg} - \rho_{fl}) V \omega^2 r$$

- Se $\rho_{fl} > \rho_{ogg}$, $F_A > F_C$ e quindi il corpo *tende verso* l'asse di rotazione.
- Se $\rho_{fl} < \rho_{ogg}$, $F_A < F_C$ e quindi il corpo *si allontana* dall'asse di rotazione.

Questo principio è ciò che permette di far funzionare le *centrifughe*, ad es. quelle usate per l'analisi del sangue.

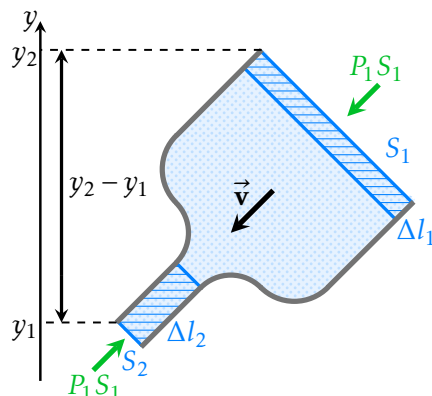
FLUIDODINAMICA I: FLUIDI IDEALI

“Non bevo mai acqua: quella è la roba che fa arrugginire i tubi.”

W. C. FIELDS, alcolista poco anonimo

11.1 EQUAZIONE DI BERNOULLI

COSA SUCCEDA se il fluido è in *movimento*? Prendiamo un liquido ideale (incomprimibile e non viscoso) in **moto stazionario**, ovvero un moto in cui le grandezze fisiche rimangono *costanti* rispetto al tempo.



Consideriamo un condotto generico in cui scorre il fluido dall'altezza y_2 a y_1 (con $y_2 > y_1$) e calcoliamo il *lavoro compiuto* da una porzione m (approssimabile ad un cilindro/prisma regolare di base S_i e altezza Δl_i) in Δt tra due sezioni S_1 e S_2 .

La porzione in S_1 subisce una forza di pressione $F_1 = P_1 S_1$ verso il basso a causa del fluido sovrastante; allo stesso modo, m in S_2 , poiché non è in caduta libera, riceve una spinta $F_2 = P_2 S_2$ verso l'alto dovuta alle pressioni del fluido. Lo spostamento del fluido è *parallelo* alle forze di pressione, pertanto il lavoro compiuto dalla pressione del fluido in movimento è:

$$\begin{cases} W_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta l_1 = P_1 S_1 \Delta l_1 \\ W_2 = \vec{F}_2 \cdot \Delta l_2 = -P_2 S_2 \Delta l_2 \end{cases}$$

$$W_P = W_1 + W_2 = P_1 S_1 \Delta l_1 - P_2 S_2 \Delta l_2$$

Poiché lo spostamento è sempre verso il basso, mentre F_2 è rivolta verso l'alto, il lavoro compiuto da m in S_2 è negativo.

Il fluido, avendo una massa, ha un'energia potenziale gravitazionale:

$$\begin{cases} E_{P1} = mgy_1 = \rho V_1 g y_1 = \rho S_1 \Delta l_1 g y_1 \\ E_{P2} = mgy_2 = \rho V_2 g y_2 = \rho S_2 \Delta l_2 g y_2 \end{cases}$$

$$E_{P,TOT} = E_{P1} - E_{P2} = \rho S_1 \Delta l_1 g y_1 - \rho S_2 \Delta l_2 g y_2$$

Inoltre, essendo il liquido in movimento, l'energia cinetica risulta:

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho (S_2 \Delta l_2 v_2^2 - S_1 \Delta l_1 v_1^2)$$

Poiché il fluido è *incomprimibile*, le caratteristiche di m sono *costanti*, ovvero $S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2$. Allora:

$$\begin{cases} W_P = S_1 \Delta l_1 (P_1 - P_2) \\ E_{P,TOT} = \rho S_1 \Delta l_1 g (y_1 - y_2) \\ \Delta E_K = \frac{1}{2} \rho S_1 \Delta l_1 (v_2^2 - v_1^2) \end{cases}$$

Per il *teorema dell'energia cinetica* $W_{TOT} = \Delta E_K$; segue dunque che il lavoro totale è:

$$W_{TOT} = W_P + E_{P,TOT} = S_1 \Delta l_1 (P_1 - P_2) + \rho S_1 \Delta l_1 g (y_1 - y_2) = \frac{1}{2} \rho S_1 \Delta l_1 (v_2^2 - v_1^2) = \Delta E_K$$

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$P + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} \quad (11.1)$$

Identifichiamo:

- **PRESSIONE DINAMICA:** P , dipende dal moto microscopico, dalla temperatura e tipo di fluido.
- **PRESSIONE GRAVITAZIONALE:** $\rho g y$, dipende dalla posizione verticale.
- **PRESSIONE CINETICA:** $\frac{1}{2} \rho v^2$, dipende dalla velocità.

L'equazione sopra prende il nome di **equazione di Bernoulli**:

“In un fluido ideale in moto stazionario all'interno di un condotto, la somma della pressione dinamica, gravitazionale e cinetica rimane costante.”

OSSERVAZIONE. Prendiamo un fluido in quiete in un contenitore. Note le condizioni alla superficie (altezza y_1 dal suolo), possiamo applicare l'equazione di Bernoulli per trovare la pressione P_2 ad un'altezza y_2 dal fondo. Notiamo immediatamente che non abbiamo pressione cinetica, essendo il fluido in quiete.

$$P_1 + \rho g y_1 + \cancel{\frac{1}{2} \rho v_1^2} = P_2 + \rho g y_2 + \cancel{\frac{1}{2} \rho v_2^2}$$

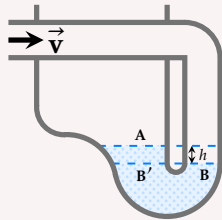
Inoltre, la pressione alla superficie dipende dalla pressione atmosferica ($P_1 = P_a$) e, definita la profondità h come la differenza fra y_2 e y_1 , si ha:

$$P_2 = P_1 + \rho g (y_1 - y_2) = P_a + \rho g h$$

Notiamo dunque che la *legge di Stevino* non è altro che un caso particolare del Teorema di Bernoulli.

ESEMPIO. TUBO DI PITOT.

Per misurare la velocità di un aereo si usa il **tubo di Pitot**, un tubo avvolto ad U, come in figura, nel quale è contenuto del *liquido manometrico*.



L'aria entra nel tubo e spinge il liquido da destra (**B**), facendo innalzare il fluido a sinistra (**A**). Fra i due lati c'è una differenza di pressione: a sinistra abbiamo solo la pressione atmosferica, a destra c'è la pressione atmosferica e la pressione cinetica dovuta dall'aria. Preso a sinistra il punto **B'**, alla stessa altezza di **B**, abbiamo che la pressione è:

$$P_{B'} = P_a + \rho_{FL}gh$$

Con h il dislivello dal livello della superficie (**A**). Invece, in **B**:

$$P_B = P_a + \frac{1}{2}\rho_{aria}v^2$$

Supponendo un liquido reale, $P_{B'} = P_B$, e quindi:

$$\rho_{FL}gh = \frac{1}{2}\rho_{aria}v^2$$

Usando la *glicerina* ($\rho_{FL} = 1,26 \text{ g/cm}^3$) e considerando la densità dell'aria all'altezza di volo $\rho_{ARIA} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, se l'altezza h misurata è 15 cm, la velocità dell'aereo è:

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_{FL}gh}{\rho_{ARIA}}} = 72,7 \text{ m/s}$$

11.1.1 Teorema di Torricelli

Supponiamo di avere un fluido in un recipiente bucato. Poiché le dimensioni della superficie A del contenitore è molto maggiore rispetto a quella S del foro ($A \gg S$), la velocità con cui scende il livello del fluido è $V_A \approx 0$. Notiamo che la pressione dinamica P_A alla superficie libera del recipiente, nonché quella P_S della superficie S , è la pressione atmosferica P_a . Il teorema di Bernoulli diventa:

$$\cancel{P_A} + \rho g y_A + \frac{1}{2}\cancel{\rho v_A^2} = \cancel{P_S} + \rho g y_S + \frac{1}{2}\rho v_S^2$$

La velocità all'uscita del foro risulta:

$$v_S = \sqrt{2gh} \quad (11.2)$$

OSSERVAZIONE. Il risultato ottenuto è analogo a risultati trovati con la caduta del grave (sez. 2.3, pag. 23).

11.2 LEGGE DI LEONARDO

Considerando un fluido incompressibile, presa una sezione qualsiasi di condotto la *quantità di fluido* che passa per *unità di tempo* è **costante**:

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta l}{\Delta t} = \rho S v = \text{costante} \quad (11.3)$$

Questa grandezza prende il nome di **portata di massa**. La *dimensione* della portata di massa è $[\dot{m}] = [MT^{-1}]$. L'unità di misura del SI è kg/s (leggasi: "chilogrammo al secondo").

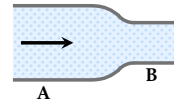
Inoltre, per un fluido incomprimibile, possiamo definire la **portata volumetrica**, che rimane costante:

$$Q = Sv = \text{costante} \quad (11.4)$$

La *dimensione* della portata volumetrica è $[Q] = [L^3T^{-1}]$. L'unità di misura del SI è m³/s (leggasi: "metro cubo al secondo").

11.3 FENOMENO DI VENTURI

Sia dato un condotto orizzontale di dimensione *variabile* come in figura; il fluido scorre da A a B, cioè dal condotto più largo ad uno più stretto. Possiamo trascurare la pressione gravitazionale tra A e B.

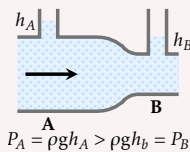


$$P_A + \cancel{\rho g y_A} + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \cancel{\rho g y_B} + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Sfruttando la legge di Leonardo, da $Q = Sv = \text{costante}$ si ha $S_A v_A = S_B v_B$. Poiché $S_A > S_B$, vale che $v_A < v_B$. Ma allora per mantenere vera l'equazione di Bernoulli segue che $P_A > P_B$. Pertanto, il fluido che passa in condotti di questo tipo:

- **aumenta** la sua *velocità*.
- **diminuisce** la *pressione dinamica esercitata sulle pareti*.

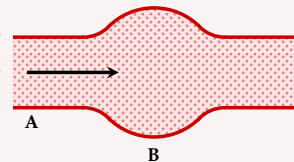
ESEMPIO.



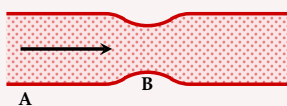
Per la legge di Stevino e il fenomeno di Venturi, nell'apparato in figura si avrà che $h_A > h_B$. Questo è il funzionamento degli aspiratori.

ESEMPIO.

Un *aneurisma* è causato da un rigonfiamento di un vaso sanguigno: poiché la sezione del prolasso S_B è maggiore di quella normale S_A , la velocità diminuisce rispetto alla norma ($v_B < v_A$).

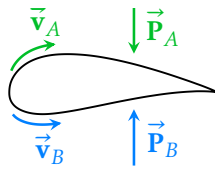


Tuttavia, questo comporta secondo il fenomeno di Venturi un aumento della pressione nella dilatazione del vaso sanguigno ($P_B > P_A$) che sforza le pareti e ne può causare la rottura.



Al contrario, nel caso di *stenosi*, poiché si ha una restrizione ($S_B < S_A$), la velocità nel tratto aumenta ($v_B > v_A$) ma la pressione diminuisce ($P_B < P_A$); il sangue, perdendo pressione, non circola ottimamente.

11.3.1 Volo e portanza



Gli aeroplani volano anche grazie al fenomeno di Venturi. Prendiamo il profilo di un'ala. L'aria, che funge come fluido, raggiunge l'ala da sopra e da sotto con due velocità che sono, rispettivamente, \vec{v}_A e \vec{v}_B . Se $v_A > v_B$, la pressione P_A sull'ala dall'alto sarà *minore* di quella P_B dal basso.

Se P_B genera una forza maggiore sia di quella generata da P_A , sia della forza peso, l'ala si solleva per **portanza**. Questa forza risulta:

$$\vec{F} = A(P_B - P_A)$$

Per l'equazione di Bernoulli $\Delta P = P_B - P_A$ è la differenza delle pressioni cinetiche, considerando il resto trascurabile. Allora:

$$\vec{F} = A(P_B - P_A) = \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)A = \frac{1}{2}\rho A(v_A + v_B)(v_A - v_B)$$

Definiamo allora:

$$\begin{cases} v = \frac{v_A + v_B}{2} \\ u = \frac{v_A - v_B}{2} \end{cases}$$

Approssimando, v è la velocità dell'aereo (e dunque dell'ala) rispetto all'aria. Allora la forza può essere riscritta come:

$$\Delta PA = \vec{F} = 2\rho Avu$$

Ponendo a la *profondità* dell'ala, segue che la **portanza** è $L = a\Delta P$:

$$L = a\Delta P = a2\rho vu \quad (11.5)$$

Definendo la **circuitazione dell'ala** $\Gamma = 2ua$, possiamo definire la portanza come:

$$L = a\Delta P = \rho v\Gamma \quad (11.6)$$

In realtà, abbiamo fatto una approssimazione del calcolo. Infatti, il **teorema di Kutta-Joukowski** definisce la circuitazione dell'ala come integrale curvilineo sul profilo dell'ala:

$$\Gamma = \oint u ds \quad (11.7)$$

Allora:

- Se $\Gamma = 0$, la portanza è nulla e l'aereo *non vola*.
- Se $\Gamma \neq 0$, la portanza *non* è nulla e l'aereo può volare.

FLUIDODINAMICA II: FLUIDI REALI

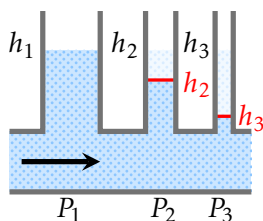
“Un idraulico è un avventuriero che segue le tracce di tubi che perdono alla loro origine.”

ARTHUR BAER, *l'Indiana Jones degli idraulici*.

12.1 FLUIDI REALI

I **COMPORAMENTI** dei fluidi visti finora sono basati sul *modello* del fluido ideale. In un **fluido reale** ci sono altre variabili in gioco; parleremo in particolare dei liquidi reali, fluidi *incomprimibili* (per quello che studieremo) ma soggetti a **fenomeni dissipativi**.

12.2 VISCOSITÀ E PERDITA DI CARICO



Per descrivere i fenomeni dissipativi nei fluidi è necessario parlare di **viscosità**.

Supponiamo di avere un condotto come in figura. Se il fluido è ideale, per l'effetto Venturi, la *pressione dinamica* è uguale in ogni sezione del condotto ($P_1 = P_2 = P_3$), dunque per la legge di Stevino le altezze delle colonnine sono uguali ($h_1 = h_2 = h_3$).

In un fluido reale notiamo invece che, andando a valle, le colonnine di fluido decrescono ($h_1 > h_2 > h_3$); ciò implica che le pressioni dinamiche a loro volta decrescono ($P_1 > P_2 > P_3$). Per quale motivo?

Poiché la pressione è, dimensionalmente, *energia per unità di volume*, significa che abbiamo *perso* dell'energia per dei fenomeni dissipativi, ad esempio un aumento di calore nelle pareti del condotto.

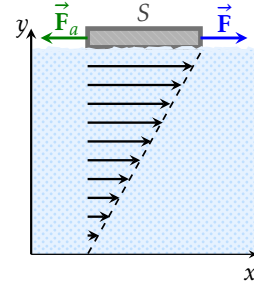
Il fenomeno appena descritto prende il nome di **perdita di carico**. Essendo fenomeni di dissipazione, non si applica più la *conservazione dell'energia meccanica* e, pertanto, neanche l'*equazione di Bernoulli*.

12.2.1 Definizione operativa della viscosità

Come si definisce *operativamente* la viscosità?

Poniamo su un liquido orizzontale una piattaforma di superficie S , che tiriamo con una forza \vec{F} parallela al fluido. Se il moto del corpo è rettilineo uniforme, esiste una forza d'attrito \vec{F}_a uguale e contraria. Sperimentalmente, troviamo che:

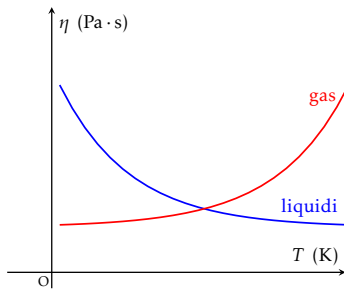
$$F_a = \eta S \frac{dv}{dy} \quad (12.1)$$



$\frac{dv}{dy}$ è la variazione della velocità del fluido rispetto alla profondità, mentre η indica la **viscosità**. Maggiore è la viscosità, maggiore è l'attrito viscoso. La *dimensione* della viscosità è $[\eta] = [ML^{-1}T^{-1}]$. L'unità di misura del SI è $\text{Pa} \cdot \text{s}$ (leggasi: "pascal per secondo").

OSSERVAZIONE. In un *fluido ideale*, il **fronte di flusso** è *perpendicolare* alle pareti del condotto.

In un *fluido reale*, il profilo è invece *parabolico*, cioè la velocità diminuisce verso le pareti seguendo l'andamento di una parabola.



La viscosità dipende non solo dal liquido in sé, ma anche da fattori esterni come la pressione (atmosferica) e la temperatura. Supponendo fissa la pressione atmosferica, come varia la viscosità al variare della temperatura?

Notiamo che varia dallo stato del fluido:

- LIQUIDI: *diminuisce* con la temperatura.
- GAS: *aumenta* con la temperatura

ESEMPIO. VISCOMETRO DI OSTWALD.

Il **viscometro di Ostwald** è un modo di misurare la viscosità di un fluido, attraverso il suo flusso capillare.

Il fluido, di viscosità η , passa nel capillare. La **legge di Hagen-Poiseulle** ci dice che la portata di un fluido in regime laminare (sez. 12.3, pag. 112). è dato da:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8 \rho \eta} \quad (12.2)$$

Noti gli altri dati, possiamo ricavare η facilmente.

12.3 REGIME DI MOTO LAMINARE E MOTO TURBOLENTO

In un fluido a **regime laminare**, la velocità delle particelle coincide con quella del fluido.

$$\vec{v}_{FL} = \vec{v} \quad (12.3)$$

In un fluido a **regime turbolento**, i volumi elementari di fluido hanno vettori velocità non necessariamente paralleli alla velocità del fluido. Se le particelle sono in moto circolare si formano dei **vortici**.

$$\vec{v}_{FL} \nparallel \vec{v}$$

ESEMPIO. I flussi dei *torrenti* sono classici esempi di moto turbolento.

Inoltre, se il moto è turbolento, la legge di Hagen-Poiseulle *non vale*, dato che la portata è minore rispetto al caso equivalente laminare ($Q_{turb} < Q_{lam}$).

12.3.1 Numero di Reynolds

Definiamo la quantità *adimensionale* **numero di Reynolds**. Essa mette insieme le informazioni di cui abbiamo parlato precedentemente per poter descrivere in maniera qualitativa questi moti; è definita in base al rapporto tra due grandezze che quantificano l'inerzia e l'attrito del fluido:

$$R = \frac{\text{inerzia del fluido}}{\text{attrito del fluido}}$$

A parità di inerzia, maggiore è l'attrito, minore è il numero di Reynolds e viceversa. Invece, a parità di attrito, un fluido più inerte ha un numero di Reynolds maggiore e viceversa. Come definiamo allora le grandezze "inerzia" e "attrito"? Maggiori sono le forze d'attrito, maggiore è la viscosità; pertanto, le particelle sono *limitate* nei loro movimenti e il moto è più *laminare*.

Al contrario, più le particelle sono *libere di muoversi*, più probabile è che il fluido sia in *regime turbolento*. Intuitivamente:

- MOTO LAMINARE: numero di Reynolds piccolo.
- MOTO TURBOLENTO: numero di Reynolds grande.

Se associamo la grandezza d'attrito alla viscosità η , associamo all'inerzia del fluido una grandezza con le stesse dimensioni, data dal prodotto della densità ρ del fluido, la velocità v del fluido e (per rendere il rapporto adimensionale) una lunghezza l , generalmente le dimensioni del condotto. Allora otteniamo:

$$R = \frac{\rho v l}{\eta} \quad (12.4)$$

Ci tocca ora trovare il *passaggio* da moto laminare a turbolento e viceversa. Questo è, purtroppo, complesso da determinare con precisione e dipende da molte variabili anche esterne. Sperimentalmente, troviamo che il numero di Reynolds per cui un moto laminare diventa turbolento può anche essere diverso da quello per passare da turbolento a laminare!

In linea generale, troviamo che:

- Se $R \gg 1000 \sim 3000$ siamo in regime turbolento.
- Se $R \approx 1 \sim 10000$ passiamo al regime laminare.

Notiamo che le fasce di valori che assumono sono *molto labili* e, a secondo del moto di partenza, possono variare enormemente.

ESEMPIO. SFIGMOMANOMETRO.

Lo *sfigmomanometro*, lo strumento per misurare la pressione, si basa sul numero di Reynolds.

In una situazione di *irroramento* sanguigno standard abbiamo una portata standard. Se abbiamo un restringimento ad un vaso sanguigno il cuore pompa di più per portare la

situazione all'equilibrio; per questi motivi, il sangue ha portata costante nelle vene ed arterie.

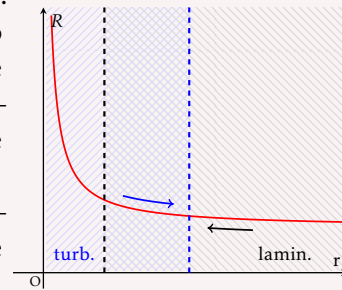
Allora, se $Q = \text{costante}$, dato il raggio *variabile* r del vaso (ciò a causa della compressione dello sfigmomanometro) la velocità v del sangue dipende da esso:

$$Q = Sv = \pi r^2 v$$

Ponendo, nella legge del numero di Reynolds, la lunghezza l come il *diametro* del condotto ($l = 2r$), si ha:

$$R = \frac{\rho v l}{\eta} = \frac{2\rho v r}{\eta} = \frac{2\rho \frac{Q}{\pi r^2} r}{\eta} = \frac{2\rho Q}{\pi r \eta}$$

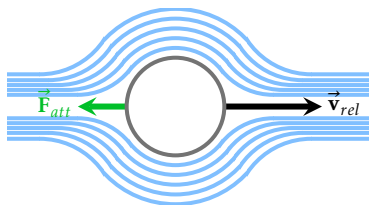
La densità del sangue è *costante*, come lo è la sua viscosità. Allora $R \propto r^{-1}$: più lo sfigmomanometro preme, più il vaso sanguigno si restringe; il numero di Reynolds aumenta e rende il moto da laminare a turbolento. Questo *non* avviene in modo *silenzioso*. Il moto turbolento è *rumoroso* e dunque si può annotare il momento del cambio di moto. Continuando a premere finché il vaso sanguigno ha dimensione pressoché *nulla*, il flusso si *interrompe* e non si sente più nulla.



Lasciando andare, il raggio *aumenta* e il moto riparte turbolento, permettendoci di sentire la **pressione sistolica**, ovvero la pressione massima pompata dal cuore.

In un altro punto (che non necessariamente coincide con quello d'andata), il moto torna ad essere laminare: qui si misura la **pressione minima**.

12.4 MOTO DEI CORPI NEI FLUIDI

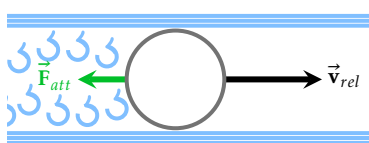


Supponiamo di avere un corpo in movimento in un fluido a **regime laminare**. Il moto del fluido viene *disturbato* dal moto dell'oggetto. Poiché è un fluido viscoso, l'oggetto sentirà una *forza d'attrito*:

$$\vec{F}_{att} = -C_1 \eta \vec{v}_{rel} l \quad (12.5)$$

C_1 è una costante relativa alla *forma* dell'oggetto. Se è una *sfera*, si ha la **legge di Stokes**; ponendo $C_1 = 6\pi$ e $l = r$:

$$\vec{F}_{att} = -6\pi \eta \vec{v}_{rel} r \quad (12.6)$$



Se l'oggetto è in un fluido in *regime turbolento*, dietro si formano dei *vortici* di fluido che cambiano le *condizioni* di moto dell'oggetto. La forza di attrito *non* è *lineare* con la velocità, ma *quadratica*; inoltre, dipende ora dalla *sezione perpendicolare* al moto relativo:

$$F_{att} = -C_2 \eta \frac{v_{rel}^2}{2} S \rho \quad (12.7)$$

In questo caso il coefficiente è una funzione del numero di Reynolds $C_2 = C_2(R)$.

12.4.1 *Goccia d'acqua*

Possiamo modellizzare una **goccia d'acqua** come una *sfera d'acqua* che cade verso il basso a causa della gravità.

$$\vec{F}_P = m\vec{g} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{H_2O} \vec{g}$$

Spostando un fluido, la goccia subisce una forza di Archimede, spostando una massa d'aria di volume sferico:

$$\vec{F}_A = -m_{aria}\vec{g} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{aria}\vec{g}$$

Inoltre, essendo l'aria un fluido viscoso, supponendo che sia in regime laminare, risente di una forza di attrito o *forza di Stokes*:

$$\vec{F}_{Stokes} = -6\pi\eta\vec{v}_{rel}r$$

Al scendere della goccia, la velocità aumenta e dunque aumenta anche la forza di Stokes. Si riesce, prima di raggiungere il suolo, ad avere un equilibrio di forze:

$$\vec{F}_P + \vec{F}_A + \vec{F}_{Stokes} = 0$$

Il moto è, a questo punto, non accelerato: qual è la velocità di regime?

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{H_2O} g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{aria} g - 6\pi\eta v_{rel} r &= 0 \\ v_{rel} &= \frac{2}{9} r^2 g \frac{\rho_{H_2O} - \rho_{aria}}{\eta} \end{aligned} \quad (12.8)$$

Poiché $r \sim 10^{-4}$ m, $\rho_{H_2O} = 10^3$ kg/m³, $\rho_{aria} = 1,3$ kg/m³ e $\eta = 1,8 \cdot 10^{-8}$ Pa·s, sostituendo otteniamo:

$$v_{rel} \simeq 1 \text{ m/s}$$

Questa velocità viene raggiunta molto rapidamente.

Se *non* ci fosse la forza di Stokes, quale sarebbe la velocità con cui arriva a terra? Per la conservazione dell'*energia meccanica*:

$$v = \sqrt{2gh} \simeq 10^2 \text{ m/s (con } h = 10.000 \text{ m)}$$

La velocità sarebbe 100 volte maggiore, tale da perforare qualunque ombrello o persino un cranio!

12.4.2 *Velocità di sedimentazione e centrifuga*

La legge che abbiamo trovato è simile alla legge che descrive la **velocità di sedimentazione**.

$$v_{rel} = \frac{2}{9} r^2 g \frac{\rho_{FL} - \rho_{PAR}}{\eta} \quad (12.9)$$

In una situazione di forze centrifughe (sez. 10.3.1, pag. 104), possiamo ragionare in modo analogo per trovare una **velocità di regime di centrifuga**.

$$\begin{aligned} \vec{F}_C + \vec{F}_A + \vec{F}_{att} &= 0 \\ \rho_{PAR} V \omega^2 r - \rho_{FL} V \omega^2 r - C_1 \eta v_{rel} l &= 0 \\ v_{rel} &= \frac{V(\rho_{FL} - \rho_{PAR})}{C_1 \eta l} \omega^2 r \end{aligned} \quad (12.10)$$

Il rapporto tra le velocità di regime viste risulta essere:

$$\frac{v_{rel}^{cent}}{v_{rel}^{sed}} = \frac{\omega^2 r}{g} \quad (12.11)$$

12.5 FENOMENI SUPERFICIALI

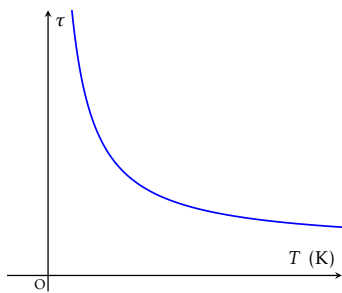
Prendiamo dell'acqua saponata e dei fili di ferro, uno a forma di U e l'altro orizzontale, lasciato libero di scorrere su quello ad U. La *pellicola* di acqua saponata che si forma nell'area delimitata dai fili di ferro si può allargare se la barra orizzontale si muove di *moto rettilineo*.

La forza che uso per spostare il filo di *superficie di contatto* l deve essere controbilanciata da delle forze di tensione generate dalla pellicola. In generale, si ha che $F \propto l$. Il coefficiente di proporzionalità è la **tensione superficiale** τ .

ATTENZIONE! La barretta risente non di una, ma di *due* forze di tensione superficiale. Infatti, per quanto sottile è la pellicola, bisogna comunque immaginarla come un *volume* di *altezza infinitesimale* delimitato orizzontalmente da due superfici che contengono al loro interno il fluido.

Con queste considerazioni, la forza di tensione superficiale complessiva è:

$$F_T = 2\tau l \quad (12.12)$$



DIGRESSIONE. L'*origine* della tensione superficiale è comune a quella della viscosità, derivando dalle forze di *attrazione elettromagnetiche*. Tuttavia, le conseguenze sono *diverse*, dato che la tensione superficiale riguarda la *superficie di contatto* l .

Facendo delle osservazioni sul valore della tensione superficiale al *variare della temperatura*, notiamo che il valore di τ *decresce all'aumentare* della temperatura.

12.5.1 Bolle e gocce

Le **bolle** sono una conseguenza delle forze superficiali. Supponiamo una bolla sferica: tagliandone una a metà, possiamo immaginare che ogni *emisfero* tiri l'altro con forze di tensioni superficiali. Essendo l la *superficie a contatto* su cui agiscono le forze, nel caso della bolla essa è la sua *sezione*, ovvero una circonferenza di raggio R (si trascuri lo spessore della bolla).

$$F_T = 4\pi\tau R \quad (12.13)$$

Ma non è l'unica forza a cui è soggetta, dato che le bolle si muovono nell'atmosfera e sono soggette alla *pressione atmosferica*. Inoltre ci sono forze di pressione agenti dall'*interno*. Nel complesso, la bolla è soggetta alla forza:

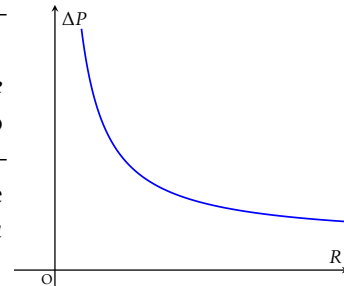
$$F_{PR} = (P_{INT} - P_{EST})\pi R^2 \quad (12.14)$$

Con πR^2 il risultato dell'integrale di superficie della sfera. Se la bolla è in equilibrio:

$$\begin{aligned} F_T &= F_{PR} \\ 4\pi\tau R &= (P_{INT} - P_{EST})\pi R^2 \\ P_{INT} - P_{EST} &= \frac{4\tau}{R} > 0 \end{aligned} \quad (12.15)$$

È evidente che $P_{INT} > P_{EST}$ è la *condizione necessaria* per l'esistenza delle bolle.

Notiamo che, a parità di tensione superficiale, al *crescere* del raggio la variazione di pressione tra interno ed esterno *si riduce*, rendendo più *suscettibile* la bolla alla *rottura*. Infatti, è più facile fare bolle piccole! Per fare bolle grandi e consistenti è necessario avere una tensione superficiale *più "piccola"*.



DIGRESSIONE. Nel mare, se vediamo la *schiuma*, pensiamo subito che deve essere *inquinata*. Ciò non è sbagliato: infatti, gli inquinanti *abbassano* la tensione superficiale dell'acqua e quindi permettono la formazione di bolle *più stabili e durature*.

Nelle **gocce** non si ha *tensione interna*, quindi dobbiamo considerare solo una superficie d'azione. Allora i risultati per le bolle possono essere adattati come:

$$\vec{F} = 2\pi\tau R \quad (12.16)$$

$$P_{INT} - P_{EST} = \frac{2\tau}{R} > 0 \quad (12.17)$$

Per bolle o gocce *non sferiche* si possono generalizzare i risultati trovati con le **formule di Laplace**. La differenza $\Delta\varphi$ fra pressione esterna ed interna risulta:

$$\Delta\varphi = 2\tau \left(\frac{1}{R_{max}} + \frac{1}{R_{min}} \right) \quad (\text{bolla}) \quad (12.18)$$

$$\Delta\varphi = \tau \left(\frac{1}{R_{max}} + \frac{1}{R_{min}} \right) \quad (\text{goccia}) \quad (12.19)$$

Con R_{max} e R_{min} i raggi massimi e minimi della curvatura della superficie. Valgono anche nel caso di una superficie orizzontale piana vista ad inizio sezione: ponendo $R_{min} = R_{max} = +\infty$, troviamo infatti $\Delta\varphi = 0$.

ESEMPIO. EMBOLIA. Supponiamo che in un *condotto sanguigno* si vada a formare una *bolla di gas*, generalmente azoto. Se la bolla *non* è sferica, immaginiamo che a sinistra si abbia una concavità **A** e a destra una **B** con raggi di curvatura rispettivamente R_{curv}^A e R_{curv}^B tali per cui $R_{curv}^A > R_{curv}^B$.

Per le formule di Laplace, nota la tensione superficiale del sangue τ , la variazione di pressione è:

$$\Delta\Phi^A = \frac{4\tau}{R_{curv}^A} < \frac{4\tau}{R_{curv}^B} = \Delta\Phi^B$$

Dunque le forze dovute alla pressione che spingono verso l'interno sono tali per cui $F^B > F^A$, con \vec{F}^A da sinistra verso destra e \vec{F}^B da destra verso sinistra. Se il *moto del sangue* prosegue da sinistra verso destra nel condotto, la forza in **B** si oppone ad esso e può essere sufficientemente *intensa* da fermare il *flusso sanguigno*.

ESEMPIO. Il *contagocce* permette di *dosare* in modo preciso certi medicinali, in quanto la goccia che crea coincide con una quantità specifica del liquido che andiamo a somministrare. Questo è dovuto alla **relazione di Tate**.

Man mano che il fluido scende dal capillare si viene a creare la *goccia*; se fosse stato un

fluido ideale sarebbe uscito immediatamente! Nel formarsi la goccia ha una massa m , e, di conseguenza, un *peso* controbilanciato dalla *tensione superficiale* del fluido che la tiene *attaccata* al capillare. Quando si *stacca*? Quando la tensione superficiale *non regge più* la forza peso. La *condizione di equilibrio* risulta:

$$mg = \pi\tau R$$

Con R la sezione del *capillare-contagocce*. Se ho una massa $m' > m$ cade una goccia di massa m : nota la tensione superficiale del fluido e la sua densità posso sapere la *massa* di una goccia. Questo è utile per misurare *quantità piccole*, come spesso serve per i *medicinali*. Risulta fondamentale usare il contagocce ad una *temperatura precisa*, onde evitare di *modificare* il valore di τ .

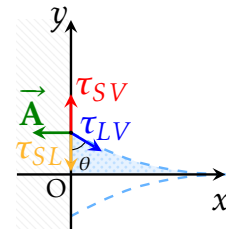
12.6 TENSIONI SUPERFICIALI E PARETI

Consideriamo un liquido, contenuto in un recipiente. Nei fluidi ideali l'angolo tra la parete e la superficie del liquido è *retto*. Nei liquidi reali *no!*

- Se **bagna** la parete, il fluido tende a risalire la parete.
- Se **non bagna** la parete, tende a creare una sorta di bolla, discendendo la parete.

Studiamo ora il primo caso. Si ha una tensione superficiale legata al contatto tra *solido* e *vapore* $\vec{\tau}_{SV}$ che tira verso l'alto, una tra *liquido* e *solido* $\vec{\tau}_{SL}$ verso il basso e una tra *liquido* e *vapore* $\vec{\tau}_{LV}$ che tira verso il liquido con *angolo* θ .

Se siamo in *equilibrio idrostatico*, esiste una **forza di adesione** \vec{A} *perpendicolare* alla parete e in verso uscente dal contenitore. Le forze sono, rispettivamente sugli assi x e y :



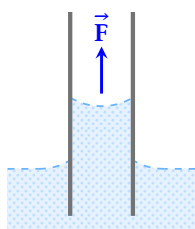
$$\begin{cases} \tau_{LV} \sin \theta - A = 0 \\ \tau_{SV} - \tau_{SL} - \tau_{LV} \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (12.20)$$

Allora:

$$\begin{cases} A = \tau_{LV} \sin \theta \\ \tau_{SV} - \tau_{SL} = \tau_{LV} \cos \theta \end{cases} \quad (12.21)$$

$\tau_{SV} - \tau_{SL} > 0$ se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$: in questo caso $\tau_{SV} > \tau_{SL}$ e il liquido bagna le pareti. Invece, se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ allora $\tau_{SV} < \tau_{SL}$ e non bagna le pareti.

12.6.1 Capillarità



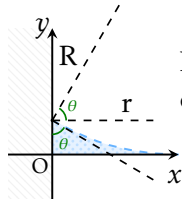
Prendiamo un liquido che *bagna le pareti* di un capillare. Nel capillare il liquido tende ad *innalzarsi*. Ciò è dovuto alla tensione superficiale del liquido che, formando una *concavità*, produce una *pressione*; questa induce una forza che spinge il liquido a risalire lungo il condotto. Definendo la *pressione del capillare* P_c , la forza risulta:

$$F = P_c S \quad (12.22)$$

Con S l'area del capillare. Dalla *formule di Laplace* per una superficie ricaviamo la

pressione del capillare:

$$P_c = \tau_{LV} \left(\frac{1}{R_{min}} + \frac{1}{R_{max}} \right) \quad (12.23)$$



Nel caso di una curvatura sferica, $R_{max} = R_{min} = R$ è il *raggio di curvatura* del capillare. Poiché, noto il raggio r del capillare, $R = \frac{r}{\cos \theta}$, e quindi:

$$P_c = 2\tau_{LV} \frac{\cos \theta}{r} \quad (12.24)$$

Se r è grande, la pressione capillare è pressoché *trascurabile*. Se r è invece piccolo, la pressione è molto più grande e dunque il liquido si *può alzare*.

All'aumentare del dislivello h , la *pressione idrostatica* (rispetto al livello del contenitore) cresce secondo la legge di Stevino $P_{idr} = \rho gh$. Finché $P_{idr} < P_c$, il fluido sale; la condizione di equilibrio tra la *pressione capillare* e quella *idrostatica* viene raggiunta quando esse sono uguali:

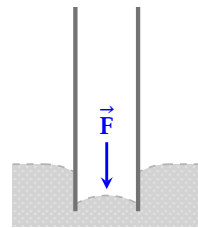
$$P_{idr} = \rho gh = 2\tau_{LV} \frac{\cos \theta}{r} = P_c$$

$$h = \frac{2\tau_{LV} \cos \theta}{\rho g r} \quad (12.25)$$

Questa equazione prende il nome di **legge di Borelli-Jurin**.

ESEMPIO. Le piante sfruttano questo fenomeno per portare, almeno in parte, la linfa verso l'alto. Usando canali da raggi nell'ordine di $r \simeq 0,01$ mm, sapendo che $\tau_{LV} \simeq 7,5 \cdot 10^{-2}$ N/m, $\cos \theta \simeq 1$, ricaviamo che la linfa può salire, senza altri input, di circa 1,5 m!

Il discorso è analogo per fluidi che *non bagnano* le pareti. In questo caso la forza di pressione è *negativa*, essendoci una *convessità*. Il liquido scende finché $\rho_{idr} < P_c$, mentre si ha l'equilibrio quando sono uguali. Otteniamo di nuovo la legge di Borelli-Jurin, ma essendo $\cos \theta < 0$, si ha appunto un $h < 0$.



TERMODINAMICA I: TERMOMETRIA

“Ogni matematico sa che è impossibile comprendere qualsiasi corso elementare di termodinamica.”

V. I. ARNOLD, *dopo non aver passato Fisica I.*

13.1 TERMODINAMICA

LA TERMODINAMICA è la branca della Fisica che studia le **trasformazioni** di *energia* da una forma all'altra. Essa è una branca molto vasta, dato che qualsiasi fenomeno fisico presenta aspetti di trasformazione dell'energia.

13.1.1 Termologia

Per approcciarci al mondo della termodinamica partiamo esplorando la **termologia**, che si suddivide in:

- **TERMOMETRIA:** si occupa dei sistemi di misura della **temperatura**.
- **CALORIMETRIA:** si occupa dello studio delle quantità di **calore** scambiate nei fenomeni fisici

13.2 SISTEMA TERMODINAMICO

Un **sistema termodinamico** è una quantità di *materia ed energia* che occupa una *zona* di spazio delimitata da **pareti** (*fisiche* o *virtuali*).

ESEMPIO. Il *corpo umano* è un sistema termodinamico delimitato da pareti fisiche, ovvero la pelle.

Ogni *sistema fisico*, grande o piccolo che sia, è un sistema termodinamico; sistemi termodinamici *interagiscono* fra di loro.

13.2.1 Variabili termodinamiche ed equilibrio termodinamico

Un sistema termodinamico è descritto da **variabili termodinamiche**, che indicano lo **stato macroscopico del sistema** ad un tempo t . Queste variabili *non* dipendono dalla “storia” del sistema! Esistono, tuttavia, delle variabili *non termodinamiche* che invece *dipendono* dalla storia del sistema.

Il sistema *non* è necessariamente in equilibrio, dato che le variabili termodinamiche dipendono dal tempo. Se, invece, non dipendono dal tempo, e quindi sono **costanti**, allora il sistema è **in equilibrio termodinamico**.

13.3 EQUAZIONI DI STATO

Non tutte le variabili termodinamiche sono **indipendenti**! La funzione che lega fra di loro queste variabili prende il nome di **equazione di stato**. Nello studio di un fluido omogeneo possiamo descrivere lo stato con:

- **PRESSIONE** P .
- **VOLUME** V .
- **TEMPERATURA** T .

Otterremo una legge in tre variabili del tipo $f(P, V, T) = 0$

13.3.1 Coefficienti termometrici

Introduciamo i seguenti **coefficienti termometrici**.

- **COEFFICIENTE DI TENSIONE**, *derivata parziale* del logaritmo della *pressione* rispetto alla *temperatura* con *volume costante*.

$$\beta = \left(\frac{\partial \ln(P)}{\partial T} \right)_V \quad (13.1)$$

All'*aumentare* della pressione, *aumenta* il coefficiente di tensione.

- **COEFFICIENTE DI COMPRIMIBILITÀ**, opposto della *derivata parziale* del logaritmo del *volume* rispetto alla *pressione* con *temperatura costante*.

$$k = - \left(\frac{\partial \ln(V)}{\partial P} \right)_T \quad (13.2)$$

Se il volume *decresce*, il coefficiente di comprimibilità è *positivo*.

- **COEFFICIENTE DI DILATAZIONE TERMICA**, *derivata parziale* del logaritmo del *volume* rispetto alla *temperatura* con *pressione costante*.

$$\gamma = \left(\frac{\partial \ln(V)}{\partial T} \right)_P \quad (13.3)$$

Se il volume *aumenta*, il coefficiente di dilatazione termica *aumenta*.

ESEMPIO. Consideriamo una barra di metallo di lunghezza L (trascuriamo le altre dimensioni al momento). Se il coefficiente di **dilatazione termica lineare** $\lambda = \gamma = - \left(\frac{\partial \ln(L)}{\partial T} \right)_P$ è costante, si ha:

$$\lambda = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_P$$

Operando, per semplicità, un passaggio alla derivata totale:

$$\lambda dT = \frac{dL}{L}$$

Integrando:

$$\int_{T_0}^T \lambda dT = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} \lambda \Delta T = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

Tuttavia, per dilatazioni che non modificano eccessivamente il coefficiente, si può stimare la lunghezza come:

$$L = L_0 (1 + \lambda \Delta T) \quad (13.4)$$

Se la barra è *elastica*, la sbarra può dilatarsi e comprimersi. Se k è il coefficiente di comprimibilità si ha, per una variazione di volume:

$$dV = -kV dP + \gamma V dT \quad (13.5)$$

Operando sulla sola lunghezza ($V \rightarrow L$) si ha $\gamma \rightarrow \lambda$. Possiamo definire la variazione della pressione come uno *sforzo* ($dP = \frac{dF}{S}$): il coefficiente di comprimibilità risulta $k = -\frac{1}{Y}$ con Y il *modulo di Young* (sez. 9.2.1, pag. 96).

$$dL = L \left(\frac{1}{Y} \frac{dF}{S} + \lambda dT \right)$$

Possiamo stimare dunque la lunghezza della sbarra dilatata come:

$$L \simeq L_0 \left(1 + \lambda dT + \frac{1}{Y} \frac{dF}{S} \right) \quad (13.6)$$

Questa è un'equazione di stato, poiché mette in relazione tutte le variabili termodinamiche che descrivono il sistema.

13.4 DEFINIZIONI OPERATIVE DI TEMPERATURA

Preso un cubetto di acqua distillata ghiacciata alla pressione di 1 atm, ad una certa temperatura t comincia a fondere. Indichiamo dunque questo livello di coesistenza di stato solido e liquido con la temperatura $t = 0^\circ\text{C}$. Allo stesso modo, la temperatura a cui l'acqua è portata all'ebollizione è definita come $t = 100^\circ\text{C}$.

La **scala centigrada** o **scala Celsius** della temperatura usa come unità la centesima parte di questa variazione tra temperatura di fusione ed ebollizione dell'acqua.

In alcuni paesi anglosassoni (in particolare gli Stati Uniti) si usa invece la **scala Fahrenheit**, basata invece su valori differenti. Definiremo in seguito il **kelvin**, unità di misura ufficiale della temperatura nel SI, da cui deriva la **scala assoluta** (sez. 13.6, pag. 125).

13.5 GAS PERFETTI

Un **gas perfetto** è un fluido *ideale* descritto solo da tre variabili termodinamiche:

- **PRESSIONE** P .
- **VOLUME** V .
- **TEMPERATURA** T .

Se prendiamo un gas *reale* e lo poniamo in una condizione fisica per cui il gas è estremamente **rarefatto**, allora il gas si comporta come un *gas perfetto*, ovvero i fenomeni dissipativi risultano trascurabili.

13.5.1 Trasformazioni particolari di gas perfetti

- TRASFORMAZIONE ISOTERMA: a $T = \text{costante}$ vale la **legge di Boyle**, cioè $PV = \text{costante}$.
- TRASFORMAZIONE ISOBARA: a $P = \text{costante}$ vale la **legge di Charles**, cioè $V = V_0(1 + \alpha_P t)$.
- TRASFORMAZIONE ISOCORA: a $V = \text{costante}$ vale la **legge di Volta** o **legge di Gay-Lussac**, cioè $P = P_0(1 + \alpha_V t)$.

Supponiamo per le formule espresse t in $^{\circ}\text{C}$; se $t = 0^{\circ}\text{C}$ indichiamo allora $V = V_0$ e $P = P_0$. α_P è il coefficiente di dilatazione termica γ , mentre α_V coincide con il coefficiente di tensione β . Sperimentalmente, troviamo che per i gas perfetti:

$$\alpha_P = \alpha_V = \frac{1}{273,15}^{\circ}\text{C}^{-1} \quad (13.7)$$

13.5.1.1 Legge di Avogadro

Per poter arrivare a parlare dell'equazione di stato dei gas perfetti è fondamentale conoscere la **legge di Avogadro**, formulata dal fisico vercellese a cavallo fra XVIII e XIX secolo. Presa 1 mol di gas perfetto (con una **mole** pari alla *massa di gas* corrispondente al **peso molecolare** del gas stesso) alla temperatura $t = 0^{\circ}\text{C}$ e pressione $P_0 = 1 \text{ atm}$, allora si ha:

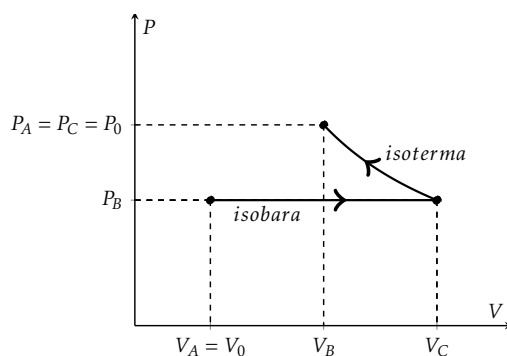
$$V_0 = 22,4\text{L} \quad (13.8)$$

Questo valore è vero per qualunque gas perfetto. Allora, possiamo ricavare che il numero di particelle in una mole è *costante* e questo numero prende il nome di **numero di Avogadro**:

$$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ particelle/mol} \quad (13.9)$$

13.6 EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI

Consideriamo un *gas perfetto*, di cui ne rappresentiamo gli stati nel **piano di Clapeyron** o piano $P - V$ (pressione - volume).



Supponiamo di avere, allo stato **A**, il gas a $P_A = P_0 = 1 \text{ atm}$ e temperatura $t_A = 0^{\circ}\text{C}$; per la **legge di Avogadro** abbiamo che $V_A = V_0 = 22,4\text{L}$.

$$A = (P_A = 1 \text{ atm}, V_A = 22,4\text{L}, t_A = 0^{\circ}\text{C})$$

Prendiamo una trasformazione *isobara* fino allo stato **C**. In base alla *legge di Charles* $V_C = V_0(1 + \alpha_P t_C)$, mentre $P_C = P_A = P_0$.

$$C = (P_C = 1 \text{ atm}, V_C = V_0(1 + \alpha_P t_C), t_C)$$

Portiamo il gas allo stato **B** con una trasformazione *isoterma*. Sul piano di Clapeyron corrisponde ad un *ramo di iperbole*. Per la *legge di Boyle* $P_C V_C = P_B V_B$. Sappiamo che $P_C = P_0$ e $V_C = V_0(1 + \alpha_p t_C)$; sostituendo al suo interno otteniamo:

$$P_0 V_0 (1 + \alpha_p t_C) = P_B V_B = PV$$

Riportando nell'equazione il valore di α_p , si ha:

$$\frac{P_0 V_0}{273,15} (273,15 + t_C) = PV$$

Notiamo che $\frac{P_0 V_0}{273,15}$ è un valore costante, a cui diamo il nome di **costante dei gas perfetti**:

$$R = \frac{P_0 V_0}{273,15} = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \quad (13.10)$$

Allora l'equazione diventa:

$$PV = RT$$

Con $T = 273,15 + t$.

Introduciamo allora la *temperatura* in **scala assoluta**, espressa in **Kelvin**. Essa consiste in un cambio del punto zero della scala, mantenendo invariato il valore effettivo espresso da un'unità di temperatura. Infatti, una temperatura in Kelvin si esprime in funzione di una temperatura in gradi Celsius come:

$$T = 273,15 + t \quad (13.11)$$

Vale dunque che $0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$. Inoltre, per definizione, una variazione fra due temperature si esprime numericamente allo *stesso identico modo* sia usando i gradi centigradi, sia i Kelvin.

Se la quantità di gas con cui operiamo è diversa da una mole, nota la *massa* m del gas e la **massa molare** M (che corrisponde al *peso molecolare* del gas), possiamo ricavare il numero di moli del gas:

$$n = \frac{m}{M} \quad (13.12)$$

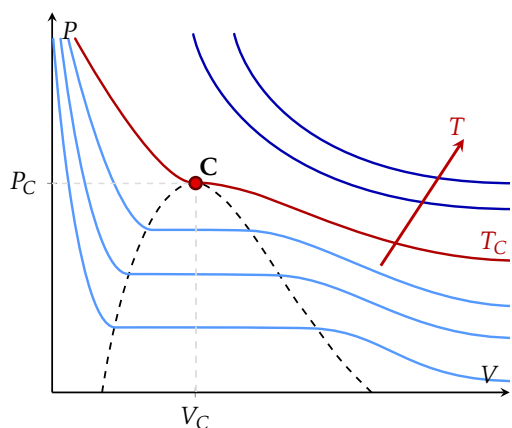
Allora banalmente segue che il volume di partenza $V_A = nV_0$. La legge vista diventa l'*equazione di stato dei gas perfetti*, prendendo anche il nome di **legge di Clausius-Clapeyron**:

$$PV = nRT \quad (13.13)$$

13.7 EQUAZIONE DI STATO DEI GAS REALI

Abbiamo visto come nel piano di Clapeyron la trasformazione isoterma è rappresentata da un *ramo di iperbole*. Minore è la temperatura, più *basso* è questo ramo.

Se il gas è a temperatura *sufficientemente bassa*, il gas aumenta la *densità* (in quanto diminuisce la pressione o volume) e smette di essere rarefatto. Se il gas non è più perfetto, la trasformazione isoterma non è un'iperbole, ma presenta un *flesso a tangente orizzontale* in un **punto critico C** (caratterizzato da *volume critico* V_C e *pressione critica* P_C) alla *temperatura critica* T_C . Se scendiamo ancora di più di temperatura, l'isoterma presenta dei *tratti orizzontali* più pronunciati ed estesi.



L'involuppo di questi livelli orizzontali forma una "campana". Se al di sopra della temperatura critica la sostanza si presenta in una fase gassosa chiamata, per l'appunto, **gas**, al di sotto della temperatura critica la sostanza ha stati diversi a seconda di dove ci troviamo rispetto a questa campana:

- A destra della campana abbiamo uno stato gassoso chiamato **vapore**.
- A sinistra della campana abbiamo la sostanza allo stato **liquido**.
- All'interno della campana la sostanza è allo stesso tempo **liquido e vapore saturo**.

La campana allora definisce due curve:

- A destra del punto C abbiamo la curva del **vapore saturo**
- A sinistra del punto C abbiamo la curva del **liquido saturo**

La rappresentazione, vista in questo capitolo, del comportamento dei gas reali prende il nome di **diagramma di Andrews**.

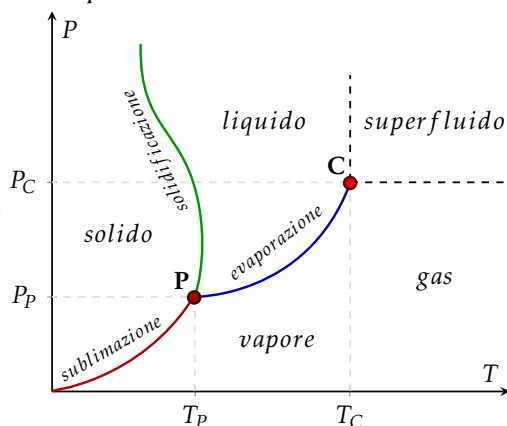
Rappresentiamo queste curve su un piano *pressione-temperatura*.

Se $T > T_C$, lungo la trasformazione isoterma (che è equivalente ad una *retta verticale* nel piano) la sostanza si mantiene gas. Se $T < T_C$, invece, il vapore può diventare *liquido*. Pertanto, sul grafico $P-T$ individuiamo una **curva di liquefazione** (da pressione minore a pressione maggiore) o di **curva di evaporazione** se percorsa nel verso opposto (da pressione maggiore a pressione minore).

Tuttavia, esiste un'altra curva per cui la sostanza si presenta allo *stato solido*, delimitata nei confronti della "zona liquida" da una **curva di solidificazione**.

Inoltre, è presente un tratto per cui la sostanza può passare *direttamente* dallo stato solido a quello di vapore, segnato dalla **curva di sublimazione**.

In un particolare punto, detto **punto triplo P**, le curve si incontrano e i tre stati della materia coesistono.



ESEMPIO. Per l'acqua il punto triplo è a temperatura $T_p = 273,16 \text{ K}$ ($t_p = 0,01 \text{ °C}$) a pressione $P_p = 616,73 \text{ Pa}$. La temperatura critica è $T_C = 647 \text{ K}$ ($t_C = 374 \text{ °C}$).

Al di sopra del punto critico la sostanza acquista un *quarto stato*, il **superfluido**.

Queste curve sono descritte dall'**equazione di Clapeyron**:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1}{T} \frac{\Delta Q_{\text{trans. fase}}}{\Delta V_{\text{trans. fase}}} \quad (13.14)$$

Con $\Delta Q_{\text{trans. fase}}$ e $\Delta V_{\text{trans. fase}}$ la *quantità di calore* scambiata e la *variazione di volume* della sostanza durante la transizione di fase.

OSSERVAZIONE. Prendiamo un cubetto di ghiaccio che vogliamo liquefare. Abbiamo bisogno di *fornire* del calore di fusione $\Delta Q_{\text{trans. fase}} > 0$; inoltre, il ghiaccio diminuisce il

suo volume nella transizione di fase ($\Delta V_{H_2O} < 0$): la curva di solidificazione ha *pendenza negativa*. Se vogliamo congelare una quantità analoga d'acqua essa deve invece *cedere* calore.

Per altre sostanze che vogliamo liquefare, dato che il volume da liquido è *maggiore* di quello da solido, si ha che $\Delta V > 0$ e pertanto la curva di solidificazione ha *pendenza positiva*.

ESEMPIO. Sappiamo che a $T = 373 \text{ K}$ ($t_p = 100^\circ\text{C}$) e $P = 1 \text{ atm}$ l'acqua bolle. Ad una *pressione minore*, ad esempio in alta montagna, la curva è più in basso e quindi anche la *temperatura necessaria per l'ebollizione è minore*.

Come descriviamo dunque una trasformazione dei gas reali nel piano $P - V$? Con le **equazioni di van der Waals**:

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (13.15)$$

v è il volume V rapportato al numero di moli n della sostanza:

$$v = \frac{V}{n} \quad (13.16)$$

a e b sono due **coefficienti volumetrici**: essi interpretano il fatto che le particelle di gas reali *non* possono avere, a livello microscopico, una dimensione finita.

- b rappresenta la *dimensione finita* delle particelle.
- a/v^2 rappresenta le *interazioni intermolecolari* tra le particelle

Preso il punto critico, essendo un flesso orizzontale:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_C = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_C = 0$$

Possiamo da ciò ricavare a e b in funzione di V_C e P_C :

$$b = \frac{V_C}{3} \quad a = 27b^2P_C = 3V_C^2P_C \quad (13.17)$$

Ricaviamo inoltre che $\frac{P_C V_C}{RT_C} = \frac{3}{8}$. Possiamo riscrivere l'equazione di van der Waals:

$$\left(P_R + \frac{3}{V_R^2}\right)\left(V_R - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}T_R \quad (13.18)$$

Con $P_R = \frac{P}{P_C}$, $V_R = \frac{V}{V_C}$ e $T_R = \frac{T}{T_C}$.

13.8 POSTULATO ZERO DELLA TERMODINAMICA

Supponiamo di avere due sistemi termodinamici **A** e **B** in contatto attraverso una **parete**. Se definiamo i due sistemi come **vettori di variabili termodinamiche**, cioè i vettori $\{\vec{X}_A\}$ e $\{\vec{X}_B\}$, si ha:

- Se la parete è **adiabatica**, $\{\vec{X}_A\}$ e $\{\vec{X}_B\}$ coesistono indipendentemente l'uno dall'altro, ovvero il sistema **A** non "vede" il sistema **B** e viceversa.
- Se la parete è **diatermica** o **conduttrice**, i sistemi si vedono e i vettori si modificano finché si ha un vettore unico $\{\vec{X}_A\}, \{\vec{X}_B\} \rightarrow \{\vec{X}_{A+B}\}$, che descrive un sistema unico **A + B** in **equilibrio termico**, in cui le variabili termodinamiche rimangono costanti.

Il **postulato zero** dunque afferma che:

“Se due sistemi termodinamici sono in equilibrio con un terzo sistema, allora i due sistemi sono in equilibrio tra di loro.”

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{C} \wedge \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$$

Possiamo vederlo come una sorta di *proprietà transitiva* della termodinamica.

ESEMPIO. La *misurazione della temperatura corporea* si basa sul postulato zero. Infatti, misurare la temperatura del corpo consiste nel mettere in equilibrio i due sistemi; se lo stesso termometro viene usato per misurare la temperatura di un'altra persona e il valore *coincide*, allora i due corpi hanno la stessa temperatura e sono *in equilibrio* fra di loro.

La temperatura è la variabile che determina se due corpi sono in equilibrio termodinamico: infatti, due sistemi lo sono se e solo hanno la stessa temperatura.

13.8.1 Un'altra definizione operativa di temperatura

È utile definire la temperatura, in maniera operativa, in modo *diverso* dalla *scala centigrada*, che dipende dalla transizione di fase dell'acqua alla pressione di 1 atm.

Supponiamo di usare un termometro basato su un *gas perfetto*. Dalla legge di Gay-Lussac $P = P_0(1 + \alpha_V t)$ possiamo ricavare la temperatura in gradi celsius in funzione della pressione:

$$t = \frac{P - P_0}{\alpha_V P_0}$$

La temperatura di 100°C si può esprimere come:

$$t_{100} = \frac{P_{100} - P_0}{\alpha_V P_0} = 100^\circ\text{C}$$

Poiché $\alpha_V = \frac{1}{273,15}^\circ\text{C}^{-1}$:

$$\alpha_V = \frac{P_{100} - P_0}{100 \cdot P_0} = \frac{1}{273,15}^\circ\text{C}^{-1}$$

Allora:

$$t = 100 \cdot \frac{P - P_0}{P_{100} - P_0}$$

Dal punto di vista sperimentale, notiamo che più è rarefatto il gas, minore è P_0 . Allora, presi gas diversi, al variare di P_0 notiamo che il rapporto $\frac{P_{100}}{P_0}$ tende a 1,366. Fissiamo questo valore come il rapporto tra la temperatura T_0 e quella T_{100} :

$$\lim_{P_0 \rightarrow 0} \frac{P_{100}}{P_0} = \frac{T_{100}}{T_0}$$

Preso un rapporto $\frac{T}{T_0} = \frac{P}{P_0}$, si ha che:

$$T = T_0 \frac{P}{P_0}$$

Ricaviamo T_0 dalla temperatura centigrada:

$$T = \frac{1}{\alpha_V} \frac{P}{P_0} = \frac{1}{\alpha_V} + \frac{P - P_0}{\alpha_V P_0} = \frac{1}{\alpha_V} + t$$

$$T_0 = \frac{1}{\alpha_V} = 273.15^\circ\text{C} \quad (13.19)$$

Quello che abbiamo definito è una scala assoluta che coincide con la *scala Kelvin* (sez. 13.6, pag. 125), ma *concettualmente* l'abbiamo definita in modo alternativo, senza passare attraverso l'acqua ma con una legge che *non* dipende dalla *composizione chimica*!

$$\frac{T_{100}}{T_0} = \frac{373,15}{273,15} = 1,366 \quad (13.20)$$

TERMODINAMICA II: CALORIMETRIA

“Accendi un fuoco a un uomo, e si scalderà per un giorno. Dai fuoco a un uomo, e sarà caldo per il resto della sua vita”

TERRY PRATCHETT, *inquisitore spagnolo*.

14.1 CALORE

IL CALORE Q è una **variabile estensiva**, che gode della *proprietà additiva* e *dipende* dalla *massa* del sistema termodinamico. Se un sistema termodinamico:

- **Cede** calore, abbiamo una quantità di calore negativa ($-\Delta Q$).
- **Acquista** calore, abbiamo una quantità di calore positiva (ΔQ).

ATTENZIONE! Il calore è diverso dalla temperatura! La prima è una misura di energia scambiata tra sistemi, la seconda è un modo per definire l'equilibrio termodinamico.

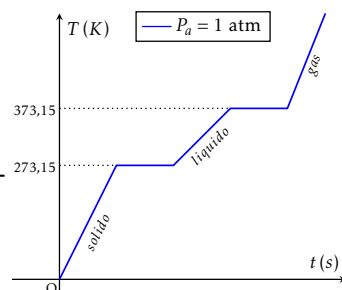
La temperatura T , che abbiamo studiato nel capitolo precedente, è una **variabile intensiva**, cioè non gode della proprietà additiva. Infatti, se T_A e T_B sono le temperature dei sistemi **A** e **B**, il sistema complessivo **A + B** non ha temperatura $T_A + T_B$, bensì, presumibilmente, una temperatura intermedia.

ESEMPIO. Immergendo un corpo caldo **B** in una certa quantità di acqua **A**, la temperatura del sistema **A + B** sarà $T_{A+B} \neq T_A + T_B$. Preso ora lo stesso corpo **B** con una quantità d'acqua $A' > A$, si ha che $T_{A'+B} \neq T_{A+B}$. Infatti, il calore che **B** cede rimane *invariato*, ma influisce *diversamente* sulla temperatura date le *diverse* quantità di acqua.

14.2 CALORE LATENTE

Se io *fornisco* del calore ad un sistema termodinamico, non è detto che T_A aumenti!

Supponiamo di fornire del calore ad una massa di ghiaccio (alla pressione $P_a = 1$ atm). Esso aumenta la sua temperatura ma, raggiunti 273,15 K, il ghiaccio comincia a fondere: la **temperatura non aumenta**, dato che il calore che fornisco serve a far sciogliere completamente il corpo. Un comportamento analogo si ha nel passaggio fra liquido e gassoso.



Questi calori forniti nelle transizioni di fase sono definiti **calori latenti**. Questo valore sono dati dalla legge:

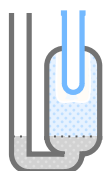
$$\Delta Q = mc_L \quad (14.1)$$

Con c_L il calore latente di transizione, che dipende dal materiale e dal tipo di transizione e m la massa che partecipa alla transizione di fase.

14.3 CALORIMETRO

Per *misurare* la quantità di calore scambiato abbiamo bisogno di un **calorimetro**. Possiamo distinguere i calorimetri in base al *funzionamento*, ovvero se si basano sulla *temperatura* oppure sulle *transizioni di fase* (e quindi sui *calori latenti*).

Il **calorimetro di Bunsen** misura il calore scambiato tra due sistemi termodinamici attraverso la variazione di volume data dalla legge di Clapeyron nella transizione di fase.



Esso consiste in un *vaso adiabatico* con un tubo in cui è presente un fluido (solitamente mercurio). Il vaso, che è riempito di *ghiaccio ed acqua*, è collegato ad una *provetta*. Supponiamo inoltre che il vaso sia a $t = 0^\circ\text{C}$ a $P_a = 1$ atm. Se immergiamo un oggetto caldo nella provetta, il ghiaccio si *fonde e diminuisce* il suo volume. Allora, il mercurio può innalzarsi nel vaso, facendo *decretere* al contempo l'altezza del fluido nella colonna.

Leggendo la *variazione di altezza* del tubo Δl possiamo conoscere la *variazione di volume* ΔV nel vaso. Poichè abbiamo una relazione tra ΔV e il calore ΔQ dalla legge di Clapeyron, allora possiamo definire *operativamente* la quantità di calore.

14.3.1 Caloria

La **grande caloria** Cal è la quantità di calore che cede 1 kg di acqua distillata nel passare da 15.5°C a 14.5°C a $P_a = 1$ atm.

La **piccola caloria** cal è la quantità di calore che cede 1 g di acqua distillata nel passare da 15.5°C a 14.5°C a $P_a = 1$ atm, ovvero $1 \text{ cal} = 10^{-3} \text{ Cal}$.

ATTENZIONE! È importante che le calorie siano definite a quelle specifiche temperature! Infatti, la quantità di calore scambiato varia con la temperatura. Ad es., a 50°C il rapporto $\frac{\Delta Q}{\text{cal}}$ è pari a 0,997.

14.4 CALORE SPECIFICO

Il **calore specifico** c è la quantità di calore δQ scambiata da una massa m per aumentare la temperatura di un dT :

$$c = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{m \Delta T} = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT} \quad (14.2)$$

ATTENZIONE! δQ è indicato con δ e non con d , come invece è la temperatura: il calore **non** è una variabile di stato e quindi **non** è possibile scrivere un differenziale esatto, in quanto non si possono scrivere funzioni del tipo $Q(P, V)$ dipendenti solo dallo stato del sistema. Li tratteremo solo come *trasferimenti infinitesimi* di energia.

Il calore specifico c si misura in $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Inoltre, c dipende dalla trasformazione in cui si opera. Infatti, vedremo che per i *gas perfetti* possiamo parlare di *calore specifico a pressione costante* c_P (trasformazione *isobara*) e *calore specifico a volume costante* c_V (trasformazione *isocora*).

14.4.1 Capacità termica

Definiamo dal calore specifico la **capacità termica** C :

$$C = cm = \frac{\delta Q}{dT} \quad (14.3)$$

La capacità termica C si misura in $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$. Per l'acqua $C_{\text{H}_2\text{O}}$ è relativamente grande, cioè si richiede una quantità di calore non indifferente per alzare la temperatura anche di un valore piccolo.

ESEMPIO. In riva al mare, le variazioni termiche stagionali sono *minori* di quelle *continentali*, dato che la capacità termica dell'acqua permette al mare di cedere o assorbire calore in maniera *poco efficiente*, mantenendo una temperatura relativamente costante nell'ambiente circostante.

14.5 METODI DI SCAMBIO DI CALORE

I modi con cui il calore si può scambiare fra corpi termodinamici possono essere raggruppati in tre grandi famiglie:

- **CONDUZIONE:** scambio di calore tramite la **materia** per contatto, *senza movimento*.
- **CONVEZIONE:** scambio di calore tramite la **materia in movimento**.
- **IRRAGGIAMENTO:** scambio di calore attraverso onde elettromagnetiche, *indipendentemente* dalla materia.

14.5.1 Conduzione

Studieremo principalmente il caso unidimensionale. Supponiamo di avere una *parete*, con del calore che si propaga da sinistra a destra. A sinistra abbiamo una temperatura T_1 , mentre a destra si ha la temperatura T_2 . La legge che descrive la propagazione del calore rispetto al tempo dipende dalla superficie S della parete, nonché dalla variazione della temperatura rispetto alla profondità della parete.

$$\frac{\delta Q}{dt} = -kS \frac{dT}{dx} \quad (14.4)$$

Il calore seguirà il verso che abbiamo detto se $T_1 > T_2$; il meno presente nella legge fa sì che la questa quantità sia positiva, come da convenzione.

Indichiamo con k il **coefficiente di conducibilità** e dipende dal materiale di cui è costituita la parete.; nel SI esso è espresso in $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Esso è nell'ordine di 1 per i **conduttori**,

materiali che trasportano facilmente il calore (es. *metalli*), mentre per gli **isolanti** (come per es. il *sughero*) esso è nell'ordine di 10^{-4} .

Si può definire il **flusso di calore attraverso S**:

$$J = \frac{1}{S} \frac{\delta Q}{dt} \quad (14.5)$$

Per completezza, diamo la legge nel caso pluridimensionale, che prende il nome **legge di Fourier**:

$$\frac{\delta Q}{dt} = -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \Delta S \quad (14.6)$$

Con $\vec{\nabla} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ il **gradiente di temperatura**. Per una sola dimensione si ha che $\vec{\nabla} T = \left(\frac{dT}{dx}, 0, 0 \right)$.

ESEMPIO. Vogliamo vedere la variazione di calore di una sbarra da un capo all'altro, da T_1 a T_2 . Se T_a è la temperatura dell'ambiente, si ha:

$$T(x) = T_a + (T_1 - T_a) e^{-Ax}$$

La temperatura decresce esponenzialmente. Questo è il motivo per cui le padelle hanno un manico lungo: all'impugnatura la temperatura alta presente alla padella si è ridotta sensibilmente e si può prendere in mano senza ustionarsi.

14.5.1.1 Il caso non stazionario della conduzione

Ciò che abbiamo visto finora è valido solamente nel caso stazionario. Il caso *non* stazionario è più complesso, dato che è necessario capire come si *accumula* δQ in ogni tratto:

$$\delta Q = c_s dm \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Se $dm = \rho S dx$, possiamo riscrivere l'equazione sopra come:

$$\frac{\delta Q}{dt} dt = c_s \rho S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Si ha che il primo membro è la derivata di $\frac{\delta Q}{dt} = -kS \frac{dT}{dx}$, dunque equivale a derivare ulteriormente $\frac{dT}{dx}$. Allora:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{c_s \rho}{k} \frac{dT}{dt}$$

La **legge di trasporto** è quindi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{dT}{dt} \quad (14.7)$$

Con $D = \frac{k}{c_s \rho}$ il **coefficiente di diffusione**:

DIGRESSIONE. Questa legge vale in generale per *modelli di diffusione* anche al di fuori della termodinamica o anche della fisica.

ESEMPIO. Si consideri il suolo. La temperatura che varia tra giorno e notte si può descrivere con una legge armonica. Alla superficie essa è:

$$T(0, t) = A \cos(\omega t)$$

Se osserviamo la temperatura ad una profondità x , la legge diventa:

$$T(x, t) = Ae^{-(\omega/2D)^{1/2}x} \cos(\omega t)$$

Se alla superficie la temperatura varia in modo periodico, in profondità è comunque periodico ma smorzato, ovvero varia molto meno rapidamente. Nell'arco delle stagioni, se alla superficie $\Delta T \simeq 20^\circ\text{C}$, ad una profondità $x = 10\text{ m}$ si ha $\Delta T \simeq 0.2^\circ\text{C}$.

Questo è il motivo per cui la **conservazione di vini e salumi** è effettuata nelle cantine, dato che non si hanno variazioni di temperatura *significative* fra stagioni, non compromettendo il prodotto.

14.5.2 Convezione

Dato che la *convezione* è un fenomeno più complesso da spiegare rispetto agli altri due, non ce ne occuperemo in modo approfondito in questo testo.

ESEMPIO. Un *termosifone* in una stanza *scalda* l'aria; quest'aria calda viene spostata verso l'alto e contemporaneamente sposta l'aria fredda verso il basso. A sua volta l'aria fredda si scalda, si alza e sposta altra aria fredda verso il basso, creando un *circolo* di aria calda-fredda. Il calore viene dunque trasportato nella stanza con questo movimento di materia.

14.5.3 Irraggiamento

Si abbiano due sistemi termodinamici, uno alla temperatura T' ed un altro alla temperatura T . I due sistemi *non sono in contatto* né fra di loro, né con un qualsiasi tipo di parete. In virtù di avere una temperatura $T' > 0$, il primo corpo emette sempre *onde elettromagnetiche*. Queste onde possono raggiungere il secondo sistema (se non è isolato) ed essere assorbite da esso in una frazione α (**coefficiente di assorbimento**).

Infatti, parte di esse possono essere riflesse (r), mentre altre attraversano il corpo senza essere assorbite (t). Per ovvi motivi, le frazioni delle onde elettromagnetiche devono risultare $r + \alpha + t = 1$.

- Se $t \simeq 0$ (nessuna onda che entra nel corpo esce) il sistema si dice **opaco**.
- Se vale anche $r \simeq 0$ (tutte le onde che raggiungono il corpo vengono assorbite), allora $\alpha = 1$ e il sistema è detto **corpo nero**.

Il coefficiente di assorbimento α dipende dalla frequenza delle onde ν e dalla temperatura del corpo; non è detto che un sistema sia corpo nero per ogni frequenza od ogni temperatura. Allora il corpo nero propriamente detto lo si ha per $\alpha(\nu, T) = 1 \quad \forall \nu$.

Inoltre, se questo si verifica, la distribuzione di energia dei fotoni assorbiti è data dalla **legge di Planck** (formulata nel 1900, che segnò l'inizio della fisica moderna):

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{15}{\pi^4} c^4 \sigma \frac{\lambda^{-5}}{e^{-c\lambda T} - 1} \quad (14.8)$$

Con λ la lunghezza d'onda dei fotoni e c la velocità della luce.

Integrando per ogni lunghezza d'onda possibile, otterremo la **legge di Stefan-Boltzmann**:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dE}{d\lambda} = \sigma T^4 \quad (14.9)$$

Con $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$ la **costante di Stefan**.

Il **teorema di Kirchoff** ci dice che un oggetto a temperatura T che emette onde elettromagnetiche con lunghezza d'onda λ ha un coefficiente di emissività pari a quello di

assorbimento.

$$\varepsilon(\lambda, T) = \alpha(\lambda, T) \quad (14.10)$$

Un corpo dunque è in grado di *assorbire* tutto quello che *emette*. Per un corpo nero, essendo $\alpha = 1$, allora $\varepsilon = 1$.

OSSERVAZIONE. Per un riflettore puro, $\varepsilon = 0 = \alpha$.

ESEMPIO. Il sole è in buona approssimazione un *corpo nero*, essendo in grado di emettere praticamente *tutte le lunghezze d'onda*. Inoltre, l'irraggiamento è l'unico modo per cui il sole può *scaldare* la Terra, data l'*assenza di materia* fra i due corpi celesti.

ESEMPIO. Un corpo con $T > 0$ perde sempre calore. Questo è il motivo per cui d'inverno ci dobbiamo *coprire*: dato che emettiamo *raggi infrarossi* che ci fanno perdere calore, nel *coprirci* impediamo che il calore si possa disperdere in maniera eccessiva per irraggiamento.

TERMODINAMICA III: IL PRIMO PRINCIPIO

“Marge: Sono preoccupata per i ragazzi. Lisa sta cominciando ad avere le fobie, stamattina l’ho sorpresa mentre sezionava il suo impermeabile.

Homer: Pft, lo so. Questa macchina a moto perpetuo che ha fatto oggi è una barzelletta: non fa altro che andare sempre più veloce.

Marge: Adesso basta, dobbiamo farli tornare a scuola!

Homer: Sto con te, Marge. Lisa, vieni subito qui! In questa casa ubbidiamo alle leggi della termodinamica!”

I SIMPSONS

15.1 TRASFORMAZIONE

UNA TRASFORMAZIONE avviene in natura se manca un **equilibrio**; lo stato del sistema si modifica al fine di raggiungere questo equilibrio, che può essere di diversi tipi, fra cui, per esempio:

- Equilibrio *meccanico*.
- Equilibrio *termico*.
- Equilibrio *chimico*.

15.1.1 Sistema aperto e chiuso

Un **sistema aperto** è un sistema che permette lo *scambio di materia* con l’esterno, un **sistema chiuso** invece non lo permette.

15.1.2 Trasformazioni irreversibili e reversibili

Ci sono due famiglie di trasformazioni:

- Trasformazioni **irreversibili**: spostano il sistema in una *direzione preferenziale*, ovvero il disequilibrio che innesca la trasformazione avviene solo in un senso.

- Trasformazioni **reversibili**: sono trasformazioni **quasistatiche**, cioè possiamo vederle come una *successione di stati di equilibrio* in cui l'attrito è nullo, gli scambi di calore avvengono a *temperature e pressioni quasi identiche*; sono trasformazioni *lente* e molto più rare in natura delle irreversibili.

ESEMPIO. Se faccio cadere un bicchiere esso cade e, raggiunto il suolo, si rompe. In natura, è impossibile che il bicchiere si ricomponga dai suoi cocci e torni alla posizione di partenza. Questo è un esempio di *trasformazione irreversibile*.

15.2 LAVORO TERMODINAMICO

Supponiamo di prendere una *nube di gas* che occupa un certo volume V e ha una pressione P al suo interno pressoché costante. Alla superficie la pressione π si supponga uguale alla pressione interna ($\pi = P$).

Se la nube si espande in modo uniforme, anche la sua superficie si allarga: per ogni elemento infinitesimale di superficie c'è un vettore \vec{n} normale ad essa che espande la superficie in quella direzione di una quantità dh . Il gas, rispetto all'elemento infinitesimale di area, compie una *lavoro* infinitesimo:

$$\delta\mathcal{L} = \vec{F}_p \cdot d\vec{h} \quad (15.1)$$

Con $\vec{F}_p = \pi d\vec{s}$ e $d\vec{s} \parallel \vec{n}, d\vec{h}$. Integrando sulla superficie, se $\pi = P = \text{costante}$, si ha il lavoro (seppur infinitesimo) compiuto dal gas rispetto all'intera area della nube:

$$\delta\mathcal{L} = \left(\int_S \pi d\vec{s} \right) \cdot d\vec{h} = \left(\int_S P d\vec{s} \right) \cdot d\vec{h} = P \underbrace{\left(\int_S d\vec{s} \right) \cdot d\vec{h}}_{\text{variazione di volume}} = PdV \quad (15.2)$$

La pressione può essere espressa in funzione del volume, come su un piano $P - V$. Se su di esso rappresentiamo una trasformazione tra due stati **A** e **B**, il lavoro compiuto risulta:

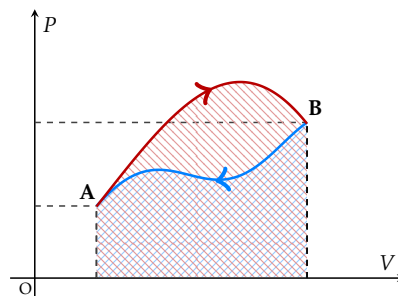
$$\Delta\mathcal{L} = \int_A^B \delta\mathcal{L} = \int_A^B PdV = \int_A^B P(V)dV \quad (15.3)$$

Ma questo sappiamo essere l'*area sottostante la curva* $P(V)$ nel tratto **A** – **B**.

Se prendiamo un'altra traiettoria tra A e B , ovvero una funzione $P'(V)$, l'area sottostante è diversa e dunque il lavoro è diverso. Il lavoro, pertanto, *non* è una variabile di stato.

15.2.1 Lavoro e trasformazioni cicliche

Prendiamo una trasformazione ciclica.



Da **A** a **B** il lavoro compiuto è *positivo* (in figura l'area rossa), da **B** a **A** è *negativo* (in figura l'area blu).

$$\Delta\mathcal{L} = \underbrace{\int_A^B PdV}_{\Delta\mathcal{L}>0} + \underbrace{\int_B^A PdV}_{\Delta\mathcal{L}<0}$$

Il lavoro totale è dunque l'area contenuta nel ciclo, pertanto:

- Se il ciclo è in *senso orario*, il lavoro è *positivo*.
- Se il ciclo è in *senso antiorario*, il lavoro è *negativo*.

In generale, se un sistema *compie lavoro* allora $\Delta\mathcal{L} > 0$, se *subisce lavoro* $\Delta\mathcal{L} < 0$.

15.3 PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DI JOULE-MAYER

Prendiamo il *calorimetro di Bunsen* visto in precedenza (sez. 14.3, pag. 132). Nella "provetta", in questo caso per necessità di dimensioni maggiori, si ha un'asta con delle *pale*, collegato ad un *volano* che è collegata a sua volta ad un paio di carrucole con pesi.

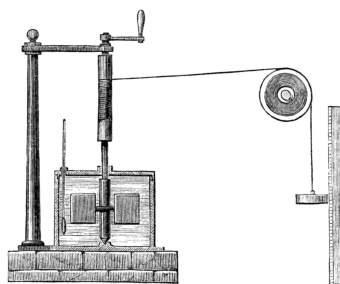


Figura 15.1: Esperimento originale di Joule, con utilizzo di una sola massa

Lasciati gli oggetti *liberi di cadere*, il volano si mette in moto e *muove le pale*. Esse creano un *attrito* con l'acqua della provetta, causando allora una forza di attrito anche sulle masse. Se non ci fosse attrito si conserverebbe l'energia meccanica, ma essendocene si ha $\Delta E_P \neq \Delta E_K$. Tuttavia, il calorimetro ha *assorbito* una quantità di calore ΔQ a noi nota, mentre la differenza di energia, ovvero il lavoro compiuto $\Delta\mathcal{L}$, è data da:

$$\Delta\mathcal{L} = \Delta E_P - \Delta E_K = 2mgh - mv^2$$

Scopriamo che $J = \frac{\Delta\mathcal{L}}{\Delta Q} = 4186 \text{ J/Cal}$ è una *quantità costante* rispetto a molti parametri dell'esperimento. In questo modo possiamo utilizzare un'unica *unità di misura* sia per il calore, sia per l'energia, dato che:

$$1 \text{ Cal} = 4186 \text{ J} \quad (15.4)$$

Se espresso nella stessa unità di misura $\frac{\Delta\mathcal{L}}{\Delta Q} = 1$. Questo è il **principio di equivalenza di Joule-Mayer** tra *calore* ed *energia meccanica*.

15.4 ENERGIA INTERNA E PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Se consideriamo il sistema termodinamico visto nella sezione precedente, notiamo che lo stato iniziale e finale hanno le stesse variabili termodinamiche:

$$\begin{cases} P_1 = P_2 \\ V_1 = V_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases} \quad (15.5)$$

Allora la trasformazione dell'esperienza di Joule è un *ciclo*. Noto ciò, il lavoro compiuto è:

$$\int_1^2 \delta \mathcal{L} = \oint \delta \mathcal{L} = 2mgh - mv^2$$

Con \oint indichiamo l'integrale calcolato su un ciclo. Allo stesso modo $\oint \delta Q = \Delta Q$. Dire che $\Delta Q = \Delta \mathcal{L}$ significa eguagliare i due integrali, cioè:

$$\oint \delta Q = \oint \delta \mathcal{L} \Rightarrow \oint (\delta Q - \delta \mathcal{L}) = 0$$

Calcoliamo l'integrale appena enunciato dividendo il ciclo in due trasformazioni, il tratto ① da **A** a **B** e il tratto ② da **B** a **A**:

$$\oint (\delta Q - \delta \mathcal{L}) = \underbrace{\int_A^B (\delta Q - \delta \mathcal{L})}_{\text{rispetto a ①}} + \underbrace{\int_B^A (\delta Q - \delta \mathcal{L})}_{\text{rispetto a ②}} = 0$$

Se il ciclo è **reversibile**:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_A^B (\delta Q - \delta \mathcal{L})}_{\text{rispetto a ①}} - \underbrace{\int_A^B (\delta Q - \delta \mathcal{L})}_{\text{rispetto a ②}} &= 0 \\ \underbrace{\int_A^B (\delta Q - \delta \mathcal{L})}_{\text{rispetto a ①}} &= \underbrace{\int_A^B (\delta Q - \delta \mathcal{L})}_{\text{rispetto a ②}} \end{aligned} \quad (15.6)$$

Pertanto $\int_A^B (\delta Q - \delta \mathcal{L})$ risulta essere *indipendente* dalla *traiettoria* effettuata. Dunque $\delta Q - \delta \mathcal{L}$ è il differenziale di una *variabile termodinamica di stato*. Questa prende il nome di **energia interna** che indichiamo con U .

$$\delta Q = \delta \mathcal{L} + dU \quad (15.7)$$

DIGRESSIONE. In generale, una grandezza è una *variabile di stato* se in un *ciclo termodinamico* l'integrale rispetto ad esso è pari a zero:

$$\oint dP = \oint dV = \oint dT = \oint dU = 0$$

Allora possiamo enunciare il **primo principio della Termodinamica**:

“La differenza tra calore scambiato e lavoro subito è pari alla variazione di energia interna, la quale è una variabile di stato”

Sappiamo che $f(P, V, T) = 0$ è l'equazione di stato; scopriremo la funzione che lega le variabili termodinamiche viste in precedenza all'energia interna, ovvero una funzione $U = U(P, V, T)$.

Una prima importante conseguenza del primo principio della termodinamica è che in un qualsiasi ciclo reversibile e non, essendo $\oint(\delta Q - \delta \mathcal{L}) = \oint dU = 0$ si ha che;

$$\Delta Q = \Delta \mathcal{L} \quad (15.8)$$

Il calore scambiato in un ciclo è pari al lavoro effettuato. Allora, se *non fornisco calore* ad un sistema esso *non compie lavoro*: questo rappresenta l'impossibilità di avere un **moto perpetuo**, ad es. non posso realizzare una macchina che compia del lavoro meccanico senza fornire energia alla macchina stessa.

15.5 LAVORO, CALORE ED ENERGIA INTERNA NELLE TRASFORMAZIONI

In generale:

- In una **espansione** ($\Delta V > 0$) si ha $\Delta \mathcal{L} > 0$ (*compie lavoro*).
- In una **compressione** ($\Delta V < 0$) si ha $\Delta \mathcal{L} < 0$ (*subisce un lavoro*).

15.5.1 Lavoro, calore ed energia interna nelle trasformazioni isocore

In una trasformazione isocora **reversibile** $V = \text{cost}$, dunque si ha $dV = 0$ e pertanto il lavoro compiuto risulta nullo:

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad (15.9)$$

Dal primo principio ricaviamo:

$$\begin{aligned} \delta Q &= \delta \mathcal{L} + dU = dU \\ \Delta Q &= \Delta U \end{aligned} \quad (15.10)$$

Una trasformazione isocora può essere dunque usata per *misurare l'energia interna* di un sistema. Essendo U una variabile di stato, non importa in realtà il percorso effettuato; pertanto, risulta più comodo usare la trasformazione più facile, che è quella isocora, per l'appunto.

$$\Delta Q = \int_A^B dU = U_B - U_A = \Delta U \quad (15.11)$$

15.5.2 Lavoro, calore ed energia interna nelle trasformazioni isobare

In una trasformazione isobara $P = \text{costante}$, dunque il lavoro compiuto è:

$$\delta \mathcal{L} = PdV = d(PV) \quad (15.12)$$

Che, nel caso finito, risulta:

$$\Delta \mathcal{L} = P\Delta V \quad (15.13)$$

Dal primo principio ricaviamo:

$$\delta Q = \delta \mathcal{L} + dU = d(PV) + dU = d(PV + U)$$

La quantità $PV + U$ definisce una *nuova variabile di stato*, l'**entalpia** H , che nel caso delle trasformazioni isobare:

$$\delta Q = dH \quad (15.14)$$

Abbiamo visto che il calore specifico in generale vale $c = \frac{\delta Q}{mdT}$; nelle *trasformazioni isobare* si ha c_P , che definiamo pertanto come:

$$c_P = \frac{\delta Q}{mdT} = \frac{dH}{mdT} \quad (15.15)$$

DIGRESSIONE. Le *trasformazioni chimiche* usano in modo preponderante l'entalpia, dato che spesso vengono effettuate a pressione atmosferica.

15.5.3 Lavoro, calore ed energia interna nelle isoterme

In una *trasformazione isoterma* ($T = \text{cost}$) di un gas perfetto, poiché vale l'equazione di stato $PV = nRT$, si ha:

$$\Delta \mathcal{L} = \int_A^B P dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (15.16)$$

Se $V_B > V_A$, $\Delta \mathcal{L} > 0$. Vedremo che l'espressione di U è $U = U_0 + c_V T$ (sez. 15.6, pag. 144). Allora, la variazione di U è:

$$dU = c_V dT \quad (15.17)$$

Essendo $dT = 0$ in quanto isoterma, otteniamo che:

$$dU = 0 \quad (15.18)$$

E quindi:

$$\Delta U = 0 \quad (15.19)$$

Allora, per il *primo principio*, il calore risulta:

$$\delta Q = \delta \mathcal{L} \quad (15.20)$$

Cioè:

$$\Delta Q = \Delta \mathcal{L} \quad (15.21)$$

Allora vale che:

- In una **espansione** ($\Delta V > 0$) si ha $\Delta Q > 0$ (*assorbe calore*).
- In una **compressione** ($\Delta V < 0$) si ha $\Delta Q < 0$ (*cede calore*).

Con l'equazione dei **gas reali**, data la pressione $P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{v^2}$, il lavoro risulta:

$$\Delta \mathcal{L} = RT \ln \frac{V_B - b}{V_A - b} + a \left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_A} \right) \quad (15.22)$$

15.5.4 Lavoro, calore ed energia interna nelle trasformazioni adiabatiche

Una **trasformazione adiabatica** è caratterizzata dall'assenza di calore scambiato, cioè:

$$\delta Q = 0 \quad (15.23)$$

Allora, dal *primo principio* ricaviamo:

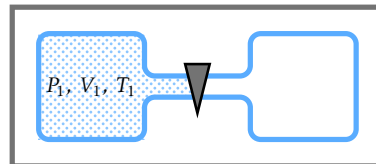
$$\begin{aligned} \delta Q = \delta \mathcal{L} + dU &= 0 \\ \delta \mathcal{L} &= -dU \end{aligned} \quad (15.24)$$

In modo analogo alle trasformazioni isocore, possiamo usare il lavoro per misurare l'energia interna del sistema:

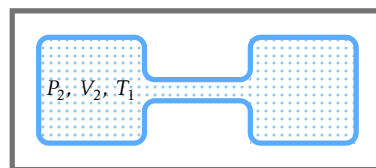
$$\Delta \mathcal{L} = - \int_A^B dU = U_A - U_B = -\Delta U \quad (15.25)$$

15.6 ESPERIMENTO DELL'ESPANSIONE LIBERA DI JOULE

Prendiamo un calorimetro *termostatico*, a pareti adiabatiche, al cui interno si ha la temperatura $T_1 = \text{costante}$. Nel calorimetro poniamo due *bocce* dalle *pareti rigide*, collegate da un *canale di volume trascurabile*. Il canale è dotato di un *rubinetto* che, essendo all'inizio chiuso, blocca l'accesso fra le due bocce. Supponiamo di riempire una di queste due con un gas. Se apriamo il rubinetto il gas si diffonderà nell'altra boccia.



Allora, se prima il sistema era descritto dalle variabili di stato T_1, P_1 e V_1 , ora è descritto da T_1, P_2 e $V_2 = 2V_1$: sono cambiate tutte le variabili termodinamiche *eccetto* la temperatura.



Poiché l'apparato è in un calorimetro, possiamo misurare il calore scambiato nella trasformazione, scoprendo che, se il gas è perfetto (o abbastanza rarefatto):

$$\Delta Q_{\text{perfetto}} = 0 \quad (15.26)$$

ATTENZIONE! Se avessimo un gas reale, avremmo $\Delta Q_{\text{reale}} \neq 0$

Dal *primo principio* ricaviamo:

$$\delta Q = \delta \mathcal{L} + dU = 0$$

Poiché il sistema ha pareti rigide, per espandersi il gas *non ha spinto* alcunché, cioè *non ha compiuto lavoro*. Questo è il significato di **espansione libera**:

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad (15.27)$$

Ma allora, pur essendo variate tutte le variabili termodinamiche eccetto la temperatura, si ha:

$$dU = 0 \Rightarrow \Delta U = 0 \quad (15.28)$$

Abbiamo detto in precedenza che U può essere espressa in funzione di P, V e T , cioè $U = U(P, V, T)$. Dato che esiste un'equazione di stato che lega P, V e T , possiamo anche esprimere U come $U(P, V)$, $U(P, T)$ oppure $U(V, T)$.

Se $U = U(P, T)$ si ha:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P} dP + \frac{\partial U}{\partial T} dT = 0$$

Ma $dT = 0$, quindi $dU = \frac{\partial U}{\partial P} dP = 0$; poiché $dP \neq 0$ ($P_1 \neq P_2$), necessariamente:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = 0$$

Ovvero U è *indipendente* da P . In modo analogo, se $U = U(V, T)$ si ha:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial T} dT = 0$$

Ma $dT = 0$, quindi $dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV = 0$; poiché $dV \neq 0$ ($V_1 \neq V_2$), necessariamente:

$$\frac{\partial U}{\partial V} = 0$$

Ovvero U è *indipendente* da V . Anche per $U = U(P, V)$, essendo $dP \neq 0 \neq dV$, segue che:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial T} dT = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial P} = 0$$

Allora per un gas perfetto $U = U(T)$, cioè l'energia interna dipende solo dalla temperatura:

$$dU = \frac{dU}{dT} dT \quad (15.29)$$

Essendo questo vero per ogni trasformazione, applichiamo il ragionamento al caso della trasformazione isocora. Sappiamo che $\delta Q = dU$ (in quanto isocora) e che $\delta Q = c_V dT$ (dalla definizione di calore specifico). Allora:

$$\delta Q = dU = \frac{dU}{dT} dT = c_V dT$$

Ovvero:

$$c_V = \frac{dU}{dT} \quad (15.30)$$

Integrando, supponendo $c_V = \text{costante}$:

$$\int dU = \int c_V dT$$

$$U = U_0 + c_V T \quad (15.31)$$

Questo è vero *indipendentemente dalla trasformazione* in realtà, essendo U variabile di stato. Inoltre vale, per una mole:

$$\Delta U = c_V \Delta T \quad (15.32)$$

Per trasformazioni reversibili con gas perfetti, pertanto, possiamo riscrivere il *primo principio* della Termodinamica come:

$$\delta Q = PdV + c_V dT \quad (15.33)$$

E, nel caso di più moli:

$$\delta Q = PdV + nc_V dT \quad (15.34)$$

15.7 RELAZIONE DI MAYER

Consideriamo una *trasformazione isobara* ($P = \text{costante}$). Il calore ci è noto ($\delta Q = c_p dT$) così come ci è nota l'equazione di stato (prendiamola ad una mole, con $n = 1$: $PV = RT$); allora:

$$d(PV) = d(RT) = RdT$$

$$\underbrace{VdP + PdV}_{=0} = RdT$$

$$PdV = RdT$$

Il *primo principio* risulta dunque:

$$c_p dT = RdT + c_V dT$$

$$c_P - c_V = R \quad (15.35)$$

Questa relazione, che prende il nome di **relazione di Mayer**, stabilisce il legame tra calore specifico a pressione costante e a volume costante di una stessa sostanza. Poiché $R > 0$, $c_P - c_V > 0 \Rightarrow c_P > c_V$ per i gas perfetti. Spiegheremo con la teoria microscopica i risultati seguenti:

- **GAS MONOATOMICI**, (ad es. *elio*): $c_V = \frac{3}{2}R$, $c_P = \frac{5}{2}R$.
- **GAS BIATOMICI**, (ad es. *idrogeno, ossigeno*): $c_V = \frac{5}{2}R$, $c_P = \frac{7}{2}R$.

Definiamo inoltre l'**indice adiabatico**:

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} > 1 \quad (15.36)$$

Allora:

- **GAS MONOATOMICI**: $\gamma = \frac{5}{3}$.
- **GAS BIATOMICI**: $\gamma = \frac{7}{5}$.

ATTENZIONE! Usando la definizione di calore specifico possiamo calcolare il calore scambiato **da una mole di gas perfetto** a volume e a pressione costante con le formule $\delta Q = c_V dT$ e $\delta Q = c_P dT$. Se vogliamo calcolare il calore scambiato da una quantità di gas *diversa da una mole* (ad es. n moli), ci basta moltiplicare il δQ che avremmo per una mole per il numero di moli che abbiamo.

$$\delta Q = n c_V dT \quad (15.37)$$

$$\delta Q = n c_P dT \quad (15.38)$$

Questo è perfettamente lecito dato che c_V e c_P sono definiti tramite R , la cui unità di misura è $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{K}$.

15.8 EQUAZIONE DI POISSON

Prendiamo una *trasformazione adiabatica* di un gas perfetto. Poiché $\delta Q = 0$, segue che:

$$\begin{aligned} \delta Q &= P dV + c_V dT = 0 \\ c_V dT &= -P dV = -\frac{RT}{V} dV \\ \frac{dT}{T} &= -\frac{R}{c_V} \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T} &= \int -\frac{R}{c_V} \frac{dV}{V} \\ \ln T &= -\frac{R}{c_V} \ln V + k \end{aligned}$$

Poiché $R = c_P - c_V$, $\frac{R}{c_V} = \frac{c_P - c_V}{c_V} = \gamma - 1$. Allora:

$$\begin{aligned} \ln T &= (1 - \gamma) \ln V + k \\ \ln T - \ln V^{1-\gamma} &= k \end{aligned}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost} \quad (15.39)$$

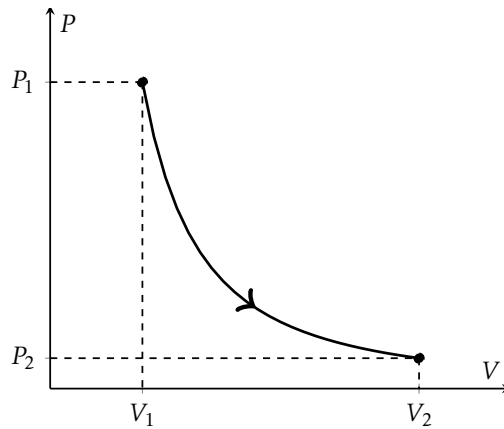
In modo analogo possiamo, con $PV = RT$, riscrivere l'equazione appena trovata nella forma:

$$PV^\gamma = \text{cost} \quad (15.40)$$

Questa legge prende il nome di **equazione di Poisson**.

15.8.1 Lavoro compiuto da una adiabatica

Abbiamo visto come il lavoro in una adiabatica è pari a $-\Delta U$. Vediamo ora di usare l'equazione di Poisson per trovare un'espressione di questo lavoro.



Poiché $PV^\gamma = \text{cost}$, presi due stati **1** e **2** abbiamo che $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma = PV^\gamma$.

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} &= \int_1^2 P dV = \int_1^2 P_1 V_1^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{P_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} [V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}] = \\ &= \frac{P_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \left[\frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} \right] = \frac{P_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \\ &= \frac{P_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{RT_1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \end{aligned}$$

Se, al posto di $P_1 V_1$ poniamo RT_1 e sfruttiamo $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$, otteniamo:

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{R}{\gamma-1} [T_1 - T_2] = \frac{R}{1-\gamma} [T_2 - T_1] = \frac{R}{1-\gamma} \Delta T \quad (15.41)$$

Questo lavoro è positivo: l'adiabatica, all'aumentare di V , fa decrescere P , dunque $T_1 < T_2$; inoltre, si ha che $\gamma > 1$.

15.8.1.1 Un altro modo per ricavare il lavoro compiuto da una adiabatica

Noto che $\delta Q = 0$, dal *primo principio* ricaviamo:

$$\delta Q = \delta \mathcal{L} + dU = 0 \Rightarrow \delta \mathcal{L} = -dU$$

Allora, in termini finiti:

$$\Delta \mathcal{L} = -\Delta U = -nc_V \Delta T \quad (15.42)$$

15.9 TRASFORMAZIONE POLITROPICA

Le **trasformazioni politropiche** sono trasformazioni reversibili aventi calore specifico costante:

$$\delta Q = cdT \quad (15.43)$$

Per un gas perfetto in trasformazione politropica il *primo principio* della Termodinamica, essendo $\delta Q = cdT$, $\delta \mathcal{L} = PdV$ e $dU = c_V dT$, risulta:

$$\begin{aligned} \delta Q = cdT &= PdV + c_V dT \\ cdT - PdV &= c_V dT \\ -PdV &= (c_V - c)dT \\ -RT \frac{dV}{V} &= (c_V - c)dT \\ -R \frac{dV}{V} &= (c_V - c) \frac{dT}{T} \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int -R \frac{dV}{V} &= \int (c_V - c) \frac{dT}{T} \\ -R \ln V &= (c_V - c) \ln T + k \\ \ln V^{-R} &= \ln \left(\frac{PV}{R} \right)^{c_V - c} + k \end{aligned}$$

Risolvendo il logaritmo:

$$\begin{aligned} V^{-R} &= P^{c_V - c} \cdot V^{c_V - c} \cdot \text{cost} \\ P^{c_V - c} V^{c_V - C + R} &= \text{cost} \\ PV^{\frac{c_V - c + R}{c_V - c}} &= PV^{\frac{c_V - c + c_p - c_V}{c_V - c}} = PV^{\frac{c_p - c}{c_V - c}} = \text{cost} \end{aligned}$$

Se definiamo l'**indice politropico** δ :

$$\delta = \frac{c_p - c}{c_V - c} \quad (15.44)$$

Otteniamo l'**equazione delle trasformazioni politropiche** di un gas perfetto:

$$PV^\delta = \text{cost} \quad (15.45)$$

15.9.1 Tanti tipi di trasformazioni politropiche

- In una *trasformazione adiabatica* vale $\delta Q = cdT = 0$, da cui ricaviamo che $c = 0$. Ma allora $\delta = \frac{c_p}{c_V} = \gamma$, e quindi $PV^\delta = PV^\gamma = \text{cost}$. Le adiabatiche sono politropiche.
- In una *trasformazione isoterma* vale $\delta Q = cdT$. Essendo $dT = 0$, se vogliamo un $\delta Q \neq 0$ deve risultare $c \rightarrow +\infty$. Ma allora $\delta \rightarrow \frac{-c}{c} = 1$, e quindi $PV^\delta = PV = \text{cost}$. Le isoterme sono politropiche.
- In una *trasformazione isobara* vale $\delta Q = cdT = c_p dT$, da cui ricaviamo che $c = c_p$. Ma allora $\delta = 0$, e quindi $PV^\delta = P = \text{cost}$. Le isobare sono politropiche.
- In una *trasformazione isocora* vale $\delta Q = cdT = c_V dT$, da cui ricaviamo che $c = c_V$. Riscriviamo l'equazione delle politropiche come $P^{\frac{1}{\delta}} V = \text{cost}$. Allora $\frac{1}{\delta} = \frac{c_V - c}{c_p - c}$. Ma allora $\frac{1}{\delta} = 0$, e quindi $P^{\frac{1}{\delta}} V = V = \text{cost}$. Le isocore sono politropiche.

15.9.2 Lavoro di una trasformazione politropica

Il lavoro di una trasformazione politropica risulta:

$$\Delta\mathcal{L} = \int_1^2 (\delta Q - dU) = \int_1^2 (cdT - c_V dT) = (c - c_V)(T_2 - T_1)$$

Dati $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ e $\delta = \frac{c_p - c}{c_V - c}$, si ha

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{R}{1 - \delta} (T_2 - T_1) = \frac{R}{\delta - 1} (T_1 - T_2) \quad (15.46)$$

Se $\delta = \gamma$ (trasformazione *adiabatica*), ritroviamo la formula vista.

Se $\delta = 1$ (trasformazione *isoterma*), $U = \text{cost}$ dunque $dU = 0$: allora $\Delta\mathcal{L} = \Delta Q$.

TERMODINAMICA IV: IL SECONDO PRINCIPIO

“Nulla nella vita è certo eccetto la morte, le tasse e la seconda legge della Termodinamica.”

SETH LLOYD, esattore delle tasse.

16.1 IL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

IL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA fu formulato prima del primo principio. Infatti, fu Carnot a esporlo per la prima volta nel 1824, mentre Mayer enunciò il primo principio nel 1842.

Come mai allora li indichiamo con questo ordine? Il primo principio ci dà informazioni generali fondamentali sulle trasformazioni, in particolare i cicli; infatti, essendo U una variabile di stato allora $\oint dU = 0$ e dunque:

$$\oint \delta \mathcal{L} = \oint \delta Q$$

Il secondo principio specifica meglio questa relazione, affermando che **non tutti i cicli sono possibili** secondo le leggi della Fisica (e non per motivi pratici, ad es. perché non saremmo in grado di produrne uno con le tecnologie attuali!).

Il secondo principio si può esprimere in due forme diverse, ma prima è necessario esporre alcuni concetti fondamentali alla trattazione.

16.1.1 Sorgente o serbatoio

Una **sorgente** o **serbatoio**, nel contesto termodinamico, è un corpo a *temperatura costante* in grado di *cedere* o *assorbire* una quantità di *calore* ΔQ *qualsiasi*.

Nella pratica possiamo creare un sistema termodinamico molto simile ad una sorgente ideale, usando ad es. un corpo con una *capacità termica* elevata oppure un corpo *in transizione di fase* (dato che mantiene costante la temperatura).

16.1.2 *Macchina termica*

Una **macchina termica** è un dispositivo termodinamico che *opera ciclicamente*, trasformando il *calore scambiato* ΔQ tra diverse sorgenti in *lavoro* $\Delta \mathcal{L}$ subito o eseguito. Per il primo principio della termodinamica, il ciclo della macchina termica è tale per cui:

$$\Delta Q = \Delta \mathcal{L}$$

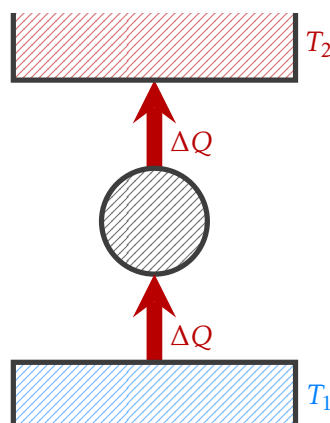
Come abbiamo visto in precedenza (sez. 15.2.1, pag. 139) se sul piano $P - V$ il ciclo della macchina è in *senso orario*, il sistema termodinamico compie lavoro *verso l'esterno* ($\Delta \mathcal{L} > 0$) e si parla di **ciclo motore**; se il ciclo della macchina è in *senso antiorario*, il sistema termodinamico *subisce* un lavoro ($\Delta \mathcal{L} < 0$) e si parla di **ciclo frigorifero**, dato che $\Delta \mathcal{L} = \Delta Q < 0$ e quindi cede calore.

16.1.3 *Postulato di Clausius*

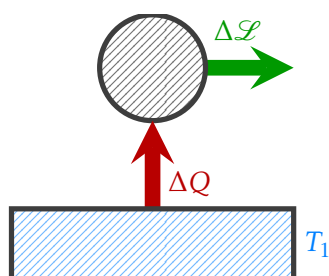
“È **impossibile** realizzare una trasformazione il cui **solo** risultato finale sia quello di *trasferire calore* da una sorgente *fredda* ad una *calda*.”

ATTENZIONE! Si potrebbe dire che in realtà ciò si può fare: dopotutto, i frigoriferi hanno questo funzionamento, trasferiscono calore da una sorgente fredda ad una più calda. Tuttavia questa macchina frigorifera non ha *solo* questo risultato, ma anche qualcosa in più, non contraddicendo pertanto il postulato!

Schematizziamo una macchina termica come un *cerchio* e le sorgenti come *linee/rettangoli*.



La macchina termica qui rappresentata prende del *calore* dalla sorgente fredda a temperatura T_1 e lo trasferisce a quella calda a $T_2 > T_1$ *in toto*. Questa, per il postulato di Clausius, è una macchina **illegale**, essendo impossibile *fisicamente* la sua esistenza.

16.1.4 *Postulato di Kelvin-Planck*

“È **impossibile** realizzare una trasformazione il cui **solo** risultato finale sia quello di *produrre lavoro* scambiando *calore* con una *sola sorgente*.”

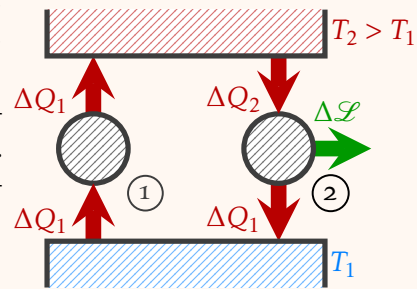
Questo postulato rende impossibile il *moto perpetuo di seconda specie*, ovvero il funzionamento illimitato di una macchina che scambia calore con una sola sorgente.

16.1.5 *L'equivalenza dei due enunciati del secondo principio*

Possiamo dimostrare come i due enunciati, per quanto differenti, esprimono lo stesso concetto.

DIMOSTRAZIONE.

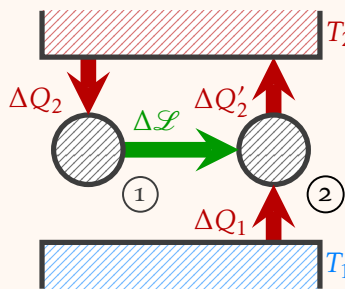
Ponendo come *ipotesi* la validità del *postulato di Kelvin-Planck*, supponiamo per *assurdo* che il *postulato di Clausius* non sia vero. Possiamo allora avere una macchina ① che trasferisce solamente calore ΔQ_1 dalla sorgente a temperatura fredda T_1 a quella a calda $T_2 > T_1$. Supponiamo di aggiungere una seconda macchina termica ② in modo che acquisti dalla sorgente calda T_2 una quantità di calore ΔQ_2 e ne ceda una ΔQ_1 alla sorgente T_1 , producendo nel frattempo un lavoro:



$$\Delta \mathcal{L} = \Delta Q_2 - \Delta Q_1$$

Consideriamo le due macchine termiche assieme nella macchina termica ①+②. Questa macchina trasferisce a T_1 un calore ΔQ_1 , ma allo stesso tempo assorbe la stessa quantità ΔQ_1 : *non ho perso o acquisito calore* rispetto a T_1 ! Allora la macchina ①+② ha assorbito una quantità di calore $\Delta Q_2 - \Delta Q_1$ dalla sorgente T_2 e ha compiuto solo un lavoro $\Delta \mathcal{L}$, *contraddicendo* il *postulato di Kelvin-Planck*.

DIMOSTRAZIONE.



Ponendo come *ipotesi* la validità del *postulato di Clausius*, supponiamo per *assurdo* che il *postulato di Kelvin-Planck* non sia vero. Possiamo allora avere una macchina ① che produce solo lavoro scambiando calore con una sola sorgente (quella calda $T_2 > T_1$, per esempio).

$$\Delta \mathcal{L} = \Delta Q_2$$

Prendiamo una *macchina frigorifera* ② che funziona con il lavoro $\Delta \mathcal{L}$ prodotto da ①, in modo tale che ② ceda $\Delta Q'_2$ a T_2 ; allo stesso tempo acquisisce del calore ΔQ_1 dalla sorgente fredda T_1 . Per il primo principio:

$$-\Delta \mathcal{L} = \Delta Q_1 - \Delta Q'_2$$

Se consideriamo la macchina ①+②, ΔQ_1 è stato ceduto da $T_1 < T_2$ e T_2 assorbe:

$$\Delta Q'_2 - \Delta Q_2 = \Delta Q_1 + \Delta \mathcal{L} - \Delta Q_2 = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 - \Delta Q_2 = \Delta Q_1$$

Allora ①+② prende calore da T_1 e cede quel calore unicamente a T_2 , *contraddicendo* il *postulato di Clausius*.

In questo modo abbiamo dimostrato che i due postulati sono equivalenti ed esprimono due facce della stessa medaglia.

16.2 RENDIMENTO

Carnot era un ingegnere che visse nel pieno della Rivoluzione Industriale. Ciò a cui era interessato consisteva nell'ottenere una macchina *ad alto rendimento*, ovvero una macchina che trasformasse *efficientemente* il calore dato in lavoro. Il **rendimento** si definisce dunque come il rapporto tra il *lavoro eseguito* e il *calore assorbito*:

$$\eta = \frac{\Delta \mathcal{L}_{\text{eseguito}}}{\Delta Q_{\text{ass.}}} \quad (16.1)$$

Dal primo principio della termodinamica abbiamo che:

$$\Delta \mathcal{L} = \oint \delta Q = \Delta Q_{\text{ass.}} - |\Delta Q_{\text{ced.}}|$$

ATTENZIONE! Poniamo il calore ceduto in valore assoluto per non avere confusione con i vari segni.

Ma allora:

$$\eta = 1 - \frac{|\Delta Q_{\text{ced.}}|}{\Delta Q_{\text{ass.}}} \quad (16.2)$$

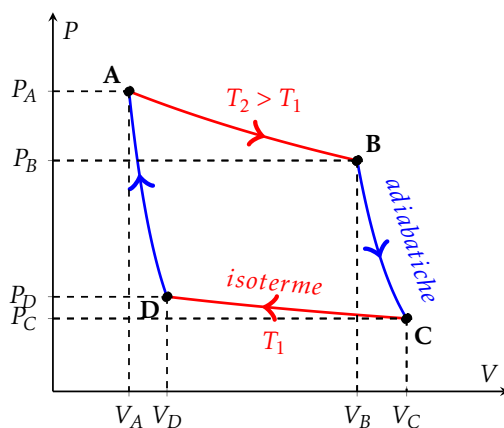
Notiamo che se $|\Delta Q_{\text{ced.}}| = 0$, allora $\eta = 1$, ma ciò è impossibile! Per il postulato di Kelvin-Planck non si può compiere un lavoro scambiando sorgente con una sola macchina *senza cedere calore*. Allora, un modo alternativo per formulare il secondo principio è:

“È **impossibile** realizzare una macchina termica con *rendimento* $\eta = 1$.”

16.3 ALCUNI TIPI DI CICLI

16.3.1 Macchina di Carnot

Una macchina termica, per essere realizzabile sotto il secondo principio, deve almeno operare tra due sorgenti diverse. Una macchina termica che funziona con solo due sorgenti si chiama **macchina di Carnot**. Abbiamo definito la sorgente come avente una temperatura costante indipendentemente dal calore scambiato. Nel piano $P - V$, allora, le *sorgenti* sono rappresentate da due *isoterme* differenti. Se prendiamo una macchina di Carnot basata su un gas perfetto, come facciamo a *chiudere il ciclo*, in modo che la macchina scambi calore solo tra le due sorgenti? Uniamo le isoterme con delle *adiabatiche*.



Una macchina di Carnot dunque compie un **ciclo** fra due isoterme e due adiabatiche, alternate.

16.3.2 Rendimento della macchina di Carnot

Quanto vale il rendimento della macchina di Carnot? Il gas da **A** → **B** si *espande* lungo un'isoterma e quindi il calore ΔQ_{AB} viene *assorbito*; da **C** → **D** si *comprime* e quindi il calore ΔQ_{CD} viene *ceduto* dalla macchina. Nei tratti **B** → **C** e **D** → **A** è adiabatico e quindi non si hanno scambi di calore.

$$\eta = 1 - \frac{|\Delta Q_{ced.}|}{\Delta Q_{ass.}} = 1 - \frac{|\Delta Q_{CD}|}{\Delta Q_{AB}}$$

Poiché la macchina usa un gas perfetto, sappiamo che $\Delta Q = \Delta \mathcal{L}$, dunque:

$$\begin{aligned}\Delta Q_{CD} &= \int_C^D \delta \mathcal{L} = \int_C^D P dV = \int_C^D nRT_C \frac{dV}{V} = nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C} = -nRT_C \ln \frac{V_C}{V_D} \\ \Delta Q_{AB} &= \int_A^B \delta \mathcal{L} = \int_A^B P dV = \int_A^B nRT_B \frac{dV}{V} = nRT_B \ln \frac{V_B}{V_A} \\ \eta &= 1 - \frac{nRT_C \ln \frac{V_C}{V_D}}{nRT_B \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_C \ln \frac{V_C}{V_D}}{T_B \ln \frac{V_B}{V_A}}\end{aligned}$$

Poiché V_B e V_C , V_A e V_D stanno su due adiabatiche:

$$\begin{aligned}T_B V_B^{\gamma-1} &= T_C V_C^{\gamma-1} & T_D V_D^{\gamma-1} &= T_A V_A^{\gamma-1} \\ \frac{V_B}{V_C} &= \left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{1/\gamma-1} & \frac{V_D}{V_A} &= \left(\frac{T_A}{T_D}\right)^{1/\gamma-1}\end{aligned}$$

Ma $T_B = T_A = T_2$ e $T_C = T_D = T_1$. Segue che:

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{T_A}{T_D} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{V_B}{V_C} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \frac{V_D}{V_A} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_A}{V_D} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Allora:

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_D} \Rightarrow \frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow \ln \frac{V_C}{V_D} = \ln \frac{V_B}{V_A}$$

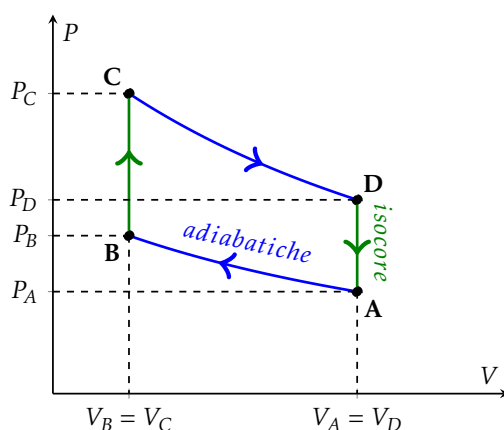
Pertanto, risulta che il rendimento di Carnot è:

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{T_C}{T_B} \frac{\ln \frac{V_C}{V_D}}{\ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \\ \eta &= 1 - \frac{T_1}{T_2}\end{aligned} \tag{16.3}$$

DIGRESSIONE. Poiché $\eta < 1$ per il secondo principio della Termodinamica, allora $T_1 > 0$ K. Se lo fosse, avremmo $\eta = 1$: non possiamo dunque creare una macchina di Carnot che abbiamo una sorgente a 0 K. Questo ci permette di affermare che è *fisicamente impossibile* raggiungere lo **zero assoluto**. Ciò dipende dalla natura stessa della materia e anticipa risultati che si vedranno con la meccanica quantistica.

16.3.3 *Ciclo Otto o di Beau de Rochas*

Il **motore a scoppio** di Otto-Rochas è descritto idealmente da due *adiabatiche* e due *isocore*.



Il ciclo incontra un numero *infinito* di isoterme con cui scambia calore; esso *non* è dunque un ciclo di Carnot. Il motore a scoppio cede calore quando diminuisce la pressione (**D** → **A**), mentre assorbe calore quando aumenta la pressione (**B** → **C**). Calcoliamo il rendimento:

$$\eta = 1 - \frac{|\Delta Q_{ced.}|}{\Delta Q_{ass.}} = 1 - \frac{|\Delta Q_{DA}|}{\Delta Q_{BC}} = 1 - \frac{\cancel{n c_V} (T_D - T_A)}{\cancel{n c_V} (T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

Poiché **C** → **D** e **A** → **B** sono adiabatiche, vale:

$$\begin{cases} T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \\ T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{T_C}{T_B} = \frac{T_D}{T_A}$$

Ciò è vero essendo $V_C = V_B$ e $V_D = V_A$. Allora:

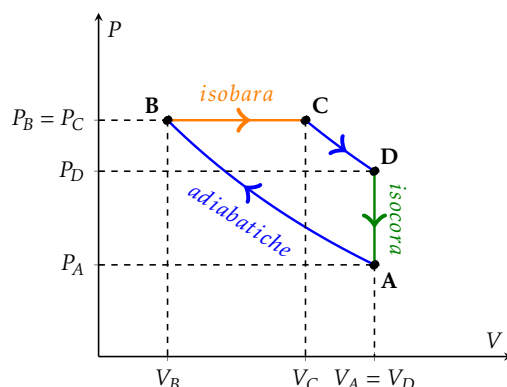
$$\eta = 1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma} \quad (16.4)$$

Definendo il **fattore di compressione del motore a scoppio** ε :

$$\varepsilon = \frac{V_A}{V_B} \quad (16.5)$$

16.3.4 *Ciclo Diesel*

Il **motore Diesel** è descritto idealmente da una *isobara*, una *adiabatica*, una *isocora* e infine un'*adiabatica* ancora.



Il motore cede calore durante l'isocora ($D \rightarrow A$), mentre assorbe calore lungo l'isobara ($B \rightarrow C$). Calcoliamo il rendimento:

$$\eta = 1 - \frac{|\Delta Q_{ced.}|}{\Delta Q_{ass.}} = 1 - \frac{|\Delta Q_{DA}|}{\Delta Q_{BC}} = 1 - \frac{\cancel{n}c_V(T_D - T_A)}{\cancel{n}c_P(T_C - T_B)} = 1 - \frac{c_V(T_D - T_A)}{c_P(T_C - T_B)}$$

Poiché $C \rightarrow D$ e $A \rightarrow B$ sono adiabatiche, otteniamo con un procedimento simile a quello svolto per il ciclo Otto che il rendimento del motore Diesel è:

$$\eta = 1 - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\rho-1} \frac{\varepsilon^{1-\gamma}}{\gamma} \quad (16.6)$$

Definendo i **fattori di compressione del motore Diesel** ε e ρ :

$$\varepsilon = \frac{V_A}{V_B} \quad \rho = \frac{V_C}{V_B} \quad (16.7)$$

Anche il motore Diesel *non* è una macchina di Carnot, dato che il ciclo incontra infinite isoterme.

16.4 TEOREMA DI CARNOT

Immaginiamo di avere due macchine, una che compie un ciclo in modo *reversibile* e un'altra che compie un ciclo *irreversibile*. Posto il rendimento della macchina reversibile come η^r e quello irreversibile come η^{ir} , il **teorema di Carnot** afferma che:

“Se due macchine, una reversibile e l'altra irreversibile, acquistano la stessa quantità di calore dalla stessa sorgente ed operano su una stessa sorgente di arrivo, allora:

$$\eta^{ir} \leq \eta^r \quad (16.8)$$

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo supponiamo che $\eta^{ir} > \eta^r$. Sappiamo, per definizione, che:

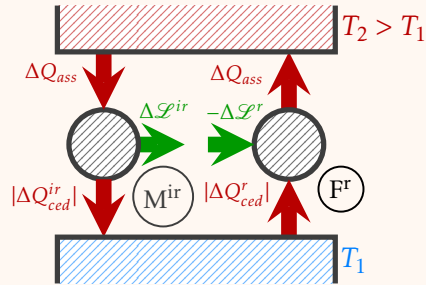
$$\eta^{ir} = \frac{\Delta \mathcal{L}^{ir}}{\Delta Q_{ass.}} > \frac{\Delta \mathcal{L}^r}{\Delta Q_{ass.}} = \eta^r$$

$\Delta Q_{ass.}$ per ipotesi è comune. La relazione precedente può essere riscritta come:

$$\frac{\Delta \mathcal{L}^{ir}}{\Delta Q_{ass.}} = 1 - \frac{|\Delta Q_{ced.}^{ir}|}{\Delta Q_{ass.}} > 1 - \frac{|\Delta Q_{ced.}^r|}{\Delta Q_{ass.}} = \frac{\Delta \mathcal{L}^r}{\Delta Q_{ass.}}$$

Questo è vero se:

$$|Q_{ced.}^{ir}| < |Q_{ced.}^r| \quad \Delta \mathcal{L}^{ir} > \Delta \mathcal{L}^r$$



Prendiamo la macchina reversibile e facciamola andare a *ciclo frigorifero*.

Preso il sistema $(M^{ir}) + (F^r)$, la quantità di calore ceduta da T_1 è:

$$|\Delta Q_{ced.}^{ir}| < |\Delta Q_{ced.}^r| \\ \Delta Q_{tot} = |\Delta Q_{ced.}^r| - |\Delta Q_{ced.}^{ir}| > 0$$

Inoltre, $\Delta \mathcal{L}^{ir} > \Delta \mathcal{L}^r$, dunque:

$$\Delta \mathcal{L}^{ir} - \Delta \mathcal{L}^r > 0$$

Abbiamo dunque costruito una macchina che assorbe calore da *una sola sorgente* e compie un *lavoro positivo*, ergo abbiamo contraddetto il *postulato di Kelvin-Planck*. Segue la tesi.

Se alla macchina *irreversibile* ne sostituiamo una di Carnot *reversibile*, tenendo il ciclo di Carnot frigorifero visto nella dimostrazione, la macchina composta è $(M^{r'}) + (F^r)$; non avendo cambiato condizioni particolari, otteniamo che $\eta^{r'} \leq \eta^r$.

Se invece alla macchina frigorifera ora sostituiamo un motore reversibile (M^r) (sempre di Carnot) e a $(M^{r'})$ prendiamo una macchina frigorifera, con la stessa dimostrazione otteniamo che $\eta^{r'} \geq \eta^r$.

Ne consegue che, per valere contemporaneamente, l'unico accettabile è $\eta' = \eta$. Ciò che ne consegue è che *tutte* le macchine di Carnot hanno lo *stesso rendimento* $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ **indipendentemente** dal fluido con cui operano!

Possiamo allora definire una *scala di temperatura* che *non* dipende dal gas misurato. Prendendo infatti delle sorgenti $T_1 < T_2 < T_3$, allora:

$$\eta_{1,2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \eta_{2,3} = 1 - \frac{T_2}{T_3} \quad \eta_{1,3} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

Generalizzando, tenendo fisso T_3 e facendo variare la temperatura $T < T_3$, η cresce man mano che T decresce. Questa scala di temperatura ha *implicazioni fondamentali*: infatti, se avevamo già affermato che era impossibile, almeno per i gas reali, raggiungere lo *zero assoluto*, possiamo generalizzarlo per un *qualsiasi fluido*, dato che dobbiamo comunque avere $\eta < 1$.

16.5 TEOREMA DI CLAUSIUS

Sappiamo che una macchina di Carnot ha rendimento:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2}$$

Ma allora:

$$\frac{|Q_1|}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Siccome $Q_1 < 0$ (è il calore ceduto), segue che:

$$\begin{aligned}\frac{Q_1}{T_1} &= -\frac{Q_2}{T_2} \\ \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} &= 0\end{aligned}\quad (16.9)$$

Invece, se $\eta^{ir} \leq \eta^r$, abbiamo che:

$$\begin{aligned}\frac{|Q_1^{ir}|}{Q_2^{ir}} &\geq \frac{T_1}{T_2} \\ \frac{|Q_1^{ir}|}{T_1} - \frac{Q_2^{ir}}{T_2} &\geq 0 \\ \frac{Q_1^{ir}}{T_1} + \frac{Q_2^{ir}}{T_2} &\leq 0\end{aligned}\quad (16.10)$$

Questo ci porta ad enunciare il **teorema di Clausius**:

“Dato un ciclo motore, se il ciclo è *reversibile*:

$$\oint \frac{\delta Q^r}{T} = 0 \quad (16.11)$$

Mentre, se il ciclo è *irreversibile*:

$$\oint \frac{\delta Q^{ir}}{T} < 0 \quad (16.12)$$

Per dimostrarlo è necessario il seguente lemma:

“Supponiamo di avere una trasformazione *qualsiasi* da un punto **A** ad un punto **B**. Allora la trasformazione $A \rightarrow B$ può essere sostituita da una trasformazione che è composta da:

- Un tratto *adiabatico* $A \rightarrow A'$
- Un tratto *isoterma reversibile* $A' \rightarrow B'$
- Un tratto *adiabatico* (di nuovo) $B' \rightarrow B$

In modo tale che $\Delta Q_{AB} = \Delta Q_{A'B'}$.”

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo le adiabatichette nei punti **A** e **B** e scegliamo l'isoterma in modo tale che, individuando nella trasformazione $A \rightarrow B$ un punto **O** e sulle adiabatichette due punti **A'** e **B'**, essa crei due aree uguali **AA'O** e **OB'B**. Allora abbiamo definito in un ciclo **AOBB'OAA'A**, ove vale:

$$\oint \delta Q = 0 = \oint \delta \mathcal{L}$$

Poiché abbiamo due adiabatichette lungo il ciclo, segue che:

$$\begin{aligned}\oint \delta Q = 0 &= \int_A^B \delta Q + \int_{B'}^{A'} \delta Q \\ \int_A^B \delta Q &= - \int_{B'}^{A'} \delta Q\end{aligned}$$

Essendo $A' \rightarrow B'$ un'isoterma reversibile, si ha:

$$\int_A^B \delta Q = \int_{A'}^{B'} \delta Q$$

Dimostriamo ora il teorema di Clausius usando il lemma appena enunciato.

DIMOSTRAZIONE. Preso un ciclo qualsiasi, possiamo dividerlo in tratti e individuare due adiabatiche ed un'isoterma che scambia la stessa quantità di calore del tratto.

Se queste stesse adiabatiche intersecano il ciclo in due tratti diversi, ho due isoterme che soddisfano entrambe il lemma precedente. Abbiamo tuttavia individuato un *ciclo di Carnot* con le due adiabatiche e le due isoterme. Lo stesso possiamo farlo con altri tratti del ciclo.

Avendo visto che, per un qualsiasi ciclo vale $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$, facciamo rispetto ai vari cicli di Carnot la somma dei $\frac{Q_i}{T_i}$, ovvero $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$. Passando all'infinitesimo la somma diventa un integrale, dunque:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Dunque, se è reversibile $\oint \frac{\delta Q^r}{T} = 0$, se è irreversibile $\oint \frac{\delta Q^{ir}}{T} < 0$

16.6 ENTROPIA

Notiamo dal teorema di Clausius che $\oint \frac{\delta Q^r}{T}$ sul ciclo è 0, pertanto deve essere necessariamente una *variabile di stato*. Definiamo dunque l'**entropia**:

$$dS = \frac{\delta Q^r}{T} \quad (16.13)$$

Purché la trasformazione $A \rightarrow B$ sia reversibile, l'entropia in **A** e **B** è la stessa indipendentemente dalla traiettoria:

$$\int_A^B \frac{\delta Q^r}{T} = \int_A^B dS = S_B - S_A = \Delta S \quad (16.14)$$

In generale, fissato S_0 , si ha:

$$S_A = S_0 + \int_0^A \frac{\delta Q^r}{T} \quad (16.15)$$

ATTENZIONE! Poiché $\frac{\delta Q^{ir}}{T} \neq dS$, è fondamentale che la trasformazione sia **reversibile!**

16.6.1 Entalpia ed entropia

Dal primo principio della termodinamica:

$$\begin{aligned} \delta Q^r &= dU + PdV \\ dS &= \frac{\delta Q^r}{T} = \frac{dU}{T} + P \frac{dV}{T} \\ TdS &= dU + PdV \end{aligned}$$

Avendo definito la grandezza di stato dell'entalpia $dH = d(PV + U)$, possiamo scriverla come:

$$dH = d(PV + U) = VdP + \underbrace{PdV + dU}_{=TdS}$$

Troviamo così la relazione tra *entalpia* ed *entropia*:

$$dH = VdP + TdS \quad (16.16)$$

16.6.2 Un'espressione dell'entropia

Per un gas perfetto ed una trasformazione reversibile il primo principio della termodinamica si esprime come $\delta Q = dU + PdV = nc_V dT + PdV$. Allora:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{nc_V dT}{T} + \frac{PdV}{T}$$

Per l'equazione di stato dei gas perfetti $PV = nRT$, dunque $P/T = nR/V$. Sostituendo e integrando:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{nc_V dT}{T} + \frac{PV}{T} = nc_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \\ \int dS &= \int nc_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \\ S - S_0 &= nc_V \ln T + nR \ln V = nc_V \ln TV^{R/c_V} \end{aligned}$$

Dalla *relazione di Mayer*:

$$R = c_P - c_V \Rightarrow \frac{R}{c_V} = \frac{c_P}{c_V} - 1 = \gamma - 1$$

Allora un'espressione dell'entropia risulta essere:

$$S = S_0 + nc_V \ln TV^{\gamma-1} \quad (16.17)$$

Allora la differenza fra due stati:

$$\Delta S = S_B - S_A = nc_V \ln \frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} \quad (16.18)$$

Se la trasformazione è **adiabatica**, $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$; dunque:

$$\ln \frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} = 0$$

Allora $\Delta S = 0$. Pertanto, tutte le *trasformazioni reversibili adiabatiche* sono *isoentropiche*. In realtà, poiché se $\delta Q^r = 0$, si ha:

$$\int_A^B dS = \int_A^B \frac{\delta Q^r}{T} = 0$$

Allora ogni trasformazione reversibile adiabatica (e non solo quelle dei gas perfetti!) è isoentropica.

16.6.3 Entropia e reversibilità delle trasformazioni

Supponiamo di prendere nel piano $P - V$ due stati **A** e **B** tramite una trasformazione reversibile $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ (①) ed un'altra, sempre reversibile, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ (②). Ma allora ciò che abbiamo scritto è un ciclo:

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q^r}{T} = 0$$

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q^r}{T} = \underbrace{\int_A^B \frac{\delta Q^r}{T}}_{\text{rispetto a ①}} + \underbrace{\int_B^A \frac{\delta Q^r}{T}}_{\text{rispetto a ②}} = 0$$

$$\underbrace{\int_A^B \frac{\delta Q^r}{T}}_{\text{rispetto a ①}} = - \underbrace{\int_B^A \frac{\delta Q^r}{T}}_{\text{rispetto a ②}}$$

Essendo ② reversibile, abbiamo:

$$\underbrace{\int_A^B \frac{\delta Q^r}{T}}_{\text{rispetto a ①}} = \underbrace{\int_A^B \frac{\delta Q^r}{T}}_{\text{rispetto a ②}}$$

Ma questo ovviamente c'era già noto per gli studi fatti in precedenza. Invece, se ① fosse irreversibile, dal teorema di Clausius abbiamo:

$$\oint \frac{\delta Q^{ir}}{T} < 0$$

$$\oint \frac{\delta Q^{ir}}{T} = \underbrace{\int_A^B \frac{\delta Q^{ir}}{T}}_{\text{rispetto a ①}} + \underbrace{\int_B^A \frac{\delta Q^r}{T}}_{\text{rispetto a ②}} < 0$$

$$\underbrace{\int_A^B \frac{\delta Q^{ir}}{T}}_{\text{rispetto a ①}} < - \underbrace{\int_B^A \frac{\delta Q^r}{T}}_{\text{rispetto a ②}} = \underbrace{\int_A^B \frac{\delta Q^r}{T}}_{\text{rispetto a ②}}$$

$$\underbrace{\int_A^B \frac{\delta Q^{ir}}{T}}_{\text{rispetto a ①}} < \underbrace{\int_A^B \frac{\delta Q^r}{T}}_{\text{rispetto a ②}} = \int_A^B dS = S_B - S_A = \Delta S$$

$$\Delta S > \int_A^B \frac{\delta Q^{ir}}{T}$$

In generale:

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \Delta S \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \text{ reversibile} \quad (16.19)$$

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} < \Delta S \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \text{ irreversibile} \quad (16.20)$$

ATTENZIONE! In seguito parleremo anche impropriamente di entropia di una trasformazione *irreversibile*. Ciò che intendiamo è l'entropia di una qualsiasi trasformazione *reversibile* fra gli stessi stati iniziali e finali **A** e **B** della trasformazione irreversibile.

Se $\int_A^B \frac{\delta Q^{ir}}{T} = 0$, la trasformazione è una *adiabatica irreversibile*, ma la variazione di entropia tra **A** e **B** è $\int_A^B \frac{\delta Q^{ir}}{T} < \Delta S$, ovvero le adiabatiche irreversibili hanno $\Delta S > 0$.

16.6.4 Principio dell'entropia

Immagina di prendere tutto l'**universo**, che intendiamo come un "*sistema improprio*" costituito dall'unione del **sistema** e dell'**ambiente** che lo circonda. Qualsiasi trasformazione all'interno dell'universo è per definizione *adiabatica*. La variazione dell'entropia può essere espressa come:

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{sistema} + \Delta S_{ambiente} \quad (16.21)$$

Una variazione di entropia *nel sistema* implica una variazione di entropia anche *nell'ambiente* e, per ovvi motivi, porta ad una variazione di entropia *nell'universo*.

- Se la trasformazione è **reversibile**: $\Delta S_{universo} = 0$
- Se la trasformazione è **irreversibile**: $\Delta S_{universo} > 0$

Invece che calcolare $\int_A^B \frac{\delta Q}{T}$, possiamo calcolare la variazione di entropia nell'universo. Allora il **principio dell'entropia** può essere espresso come:

"L'entropia dell'universo tende sempre a crescere o a rimanere costante."

ATTENZIONE! In un sistema termodinamico che **non** sia l'universo si può avere $\Delta S < 0$, ma in tal caso avremo nell'ambiente una variazione positiva di entropia che fa aumentare quella complessiva dell'universo.

ESEMPIO. ESPANSIONE LIBERA DI JOULE. Nell'esperimento di Joule che abbiamo visto (sez. 15.6, pag. 143), cosa succede all'entropia?

Quando apriamo il rubinetto, il gas si espande nelle bocce. È possibile che il gas possa tornare esattamente nella boccia di partenza? Intuitivamente *no*, il che renderebbe la trasformazione *irreversibile*, ma dimostriamolo con l'entropia.

Il sistema è termostatico, non c'è *scambio di calore* con l'esterno, dunque la trasformazione è *adiabatica*. Se fosse reversibile, l'entropia sarebbe:

$$\Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q^r}{T}$$

Prendendo una trasformazione **A** → **B** reversibile, δQ^r può essere studiata per comodità rispetto all'isoterma **A** → **B** ($dU = 0$):

$$\delta Q^r = PdV + dU = PdV$$

Analogamente, presa la trasformazione irreversibile (che rimane comunque isoterma e adiabatica):

$$\delta Q^{ir} = \delta \mathcal{L} + dU = \delta \mathcal{L} = 0$$

Ma allora, essendo adiabatica:

$$\int_A^B \frac{\delta Q^{ir}}{T} = 0$$

Ma $\Delta S \neq 0$! Infatti (noto che $V_B = 2V_A$):

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_A^B \frac{\delta Q^r}{T} = \int_A^B \frac{PdV}{T} = \int_A^B R \frac{dV}{V} \\ \Delta S &= R \ln \frac{V_B}{V_A} = R \ln \frac{2V_A}{V_A} = R \ln 2 > 0\end{aligned}$$

Quell'universo, poiché è isolato, ha $\Delta S_{universo} = \Delta S > 0$, ovvero è una trasformazione irreversibile.

OSSERVAZIONE. Possiamo quantificare *quanto è irreversibile* una trasformazione dalla discrepanza tra ΔS e $\int_A^B \frac{\delta Q}{T}$.

TERMODINAMICA V: TEORIA CINETICA DEI GAS

“La fisica non è altro che la ricerca della definitiva semplicità, ma finora ciò che abbiamo è un elegante tipo di confusione.”

BILL BRYSON, *cercando di capire la teoria cinetica dei gas.*

17.1 TEORIA CINETICA DEI GAS

FINORA ABBIAMO AFFRONTATO la Termodinamica attraverso le *proprietà macroscopiche* dei sistemi termodinamici (pressione, temperatura, volume, densità, ...). Uno dei grandi risultati della Fisica del *XIX secolo* fu quello di *collegare* questi aspetti macroscopici alle proprietà meccaniche della *struttura della materia particellare*.

Questa nuova branca, inaugurata dagli studi di *Ludwig Boltzmann*, ha iniziato una rivoluzione non solo nello studio della Termodinamica, ma ebbe ripercussioni importantissime per la conoscenza profonda del *mondo microscopico*, dando il via a quella che sarà la *meccanica quantistica* di inizio '900.

17.1.1 Gas ideale

Il *gas perfetto* che abbiamo visto in precedenza, nell'ambito della teoria cinetica, viene identificato con il **gas ideale**, ovvero un gas di N *particelle puntiformi indipendenti* che interagiscono fra di loro solo attraverso *urti*.

DIGRESSIONE. I *gas reali*, invece, hanno dimensione finita e interagiscono anche e soprattutto con *forze elettrostatiche* di attrazione.

Preso dunque del gas ideale in un *contenitore*, le particelle hanno ciascuna una *propria velocità* che cambia continuamente in base agli urti con altre particelle e le *pareti* del contenitore.

17.2 TEOREMA DEL VIRIALE

Preso un sistema di N particelle, ciascuna con energia cinetica:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Possiamo definire l'energia cinetica totale:

$$K = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Il **teorema del viriale** afferma che il *valor medio dell'energia cinetica*, calcolato su un *intervallo di tempo molto lungo*, è pari a:

$$\langle K \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \rangle_t \quad (17.1)$$

Definiamo $\langle \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \rangle_t$ il **viriale**, ovvero il prodotto scalare, mediato su un tempo lungo, tra le forze agenti sulle particelle e la loro posizione.

DIGRESSIONE. Vedremo che, in generale, esso si applica nel caso di forze centrali. Ad esempio, nel caso del campo gravitazionale il viriale è $-\frac{1}{2} E_p$

17.3 DAL VIRIALE AL LEGAME TRA MACRO E MICRO

Preso il nostro gas ideale all'interno del contenitore che, per comodità, prendiamo *cubico* di lato a , le uniche *forze agenti* sulle particelle sono soltanto quelle di *urto* (sia tra *particelle*, sia con le *pareti*).

Poniamo la scatola con un vertice nell'origine di un sistema cartesiano arbitrario e i tre lati uscenti dal vertice sui semiassi positivi. Applichiamo il teorema del viriale rispetto all'asse y . Lungo di esso, supponendo che il sistema sia *in equilibrio termico* e sia dunque *stazionario* (invariante rispetto al *tempo*), si ha:

$$\langle \vec{\mathbf{F}}_y \cdot \vec{\mathbf{r}}_y \rangle_t = \sum_{i=1}^N F_{i,y} y_i$$

Sulla parete a $y = a$, le particelle arrivano e vengono respinte, sentendo una forza della parete; questa forza non è altro che opposta alla forza di pressione delle particelle ed è dunque rivolta verso $y = 0$. Allora:

$$F_{\text{parete}} = -F_p = -PA = -Pa^2$$

Allora $\langle \vec{\mathbf{F}}_y \cdot \vec{\mathbf{r}}_y \rangle_t$, misurato in $y = a$, ha $r_y = a$ e $F_y = -Pa^2$, segue che:

$$\langle \vec{\mathbf{F}}_y \cdot \vec{\mathbf{r}}_y \rangle_t = \sum_{i=1}^N F_{i,y} y_i = -a \sum_{i=1}^N F_{i,y} = -a(Pa^2) = -Pa^3 = -PV$$

Sulla faccia posta a $y = 0$ il sistema, essendo *isotropo*, è simmetrico e pertanto il viriale rimane lo stesso. Allora, in media sull'asse y :

$$\underbrace{\langle \vec{\mathbf{F}}_y \cdot \vec{\mathbf{r}}_y \rangle_t}_{\text{valutata in } 0} + \underbrace{\langle \vec{\mathbf{F}}_y \cdot \vec{\mathbf{r}}_y \rangle_t}_{\text{valutata in } a} = \frac{PV}{2}$$

Lungo y , l'energia cinetica risulterebbe:

$$\langle K_y \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle \vec{F}_y \cdot \vec{r}_y \rangle_t = \frac{PV}{2}$$

Rispetto alle altre dimensioni, otteniamo gli stessi risultati, pertanto il risultato complessivo è tre volte il risultato precedente:

$$\begin{aligned} \langle K \rangle_t &= -\frac{1}{2} \langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle_t^{3D} = \frac{3}{2} PV \\ \langle K \rangle_t &= \frac{3}{2} PV \end{aligned} \quad (17.2)$$

Dato che operiamo al caso stazionario, possiamo parlare di valori non mediati sul lungo tempo; da questo punto in poi indicheremo questi valori medi con $\langle \dots \rangle$ (senza il pedice t). Sappiamo che l'energia cinetica totale media può essere espressa come media della somma delle energie cinetiche delle *singole particelle*:

$$\langle K \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\rangle$$

Essendo un gas ideale $m_i = m \forall i$, possiamo portarlo fuori dalla media; definiamo inoltre il valore medio della velocità quadratica:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N} \quad (17.3)$$

Allora:

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= \frac{1}{2} m \left\langle \sum_{i=1}^N v_i^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m N \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} PV \\ PV &= \frac{1}{3} N m \langle v^2 \rangle \end{aligned} \quad (17.4)$$

Abbiamo dunque trovato una relazione che collega grandezze macroscopiche (pressione e volume) con osservabili microscopiche (massa e velocità delle particelle). Possiamo esprimere da questa legge la pressione:

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \langle v^2 \rangle \quad (17.5)$$

Con N/V la **densità numerica delle particelle** (ovvero il numero di particelle per unità di volume).

17.4 TEMPERATURA ED ENERGIA CINETICA

Oltre a definire $\langle K \rangle$, possiamo definire l'energia cinetica media di *una sola particella*:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \quad (17.6)$$

Allora:

$$\langle K \rangle = N \langle \varepsilon \rangle \quad (17.7)$$

Data una mole di gas ideale:

$$RT = PV = \frac{1}{3} \frac{N_A}{V} m \langle v^2 \rangle$$

Con N pari al *numero di Avogadro* N_A in quanto è il numero di particelle in una mole di gas. Allora enunciamo la **formula di Clausius-Krönig**:

$$T = \frac{1}{3} \frac{N_A}{R} m \langle v^2 \rangle \quad (17.8)$$

Definiamo la **costante di Boltzmann**:

$$k_B = k = \frac{R}{N_A} = 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad (17.9)$$

La formula di Clausius-Krönig può essere scritta anche come:

$$T = \frac{1}{3} \frac{1}{k_B} m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{1}{k_B} \langle \varepsilon \rangle \quad (17.10)$$

Pertanto, si ha:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad (17.11)$$

Questa relazione lega la *temperatura* all'energia cinetica media, supponendo che il gas sia *ideale monoatomico con tre gradi di libertà interni* (torneremo in seguito su questo nella sez. 17.6, pag. 171). Allora, da questa legge, possiamo legare a grandezze macroscopiche la velocità dei corpi:

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \frac{2 \langle \varepsilon \rangle}{m} = \frac{3 k_B T}{m} = \frac{3 RT}{N_A m} = \frac{3 RT}{M} = \frac{3 PV}{M} = \frac{3 P}{\rho} \\ \langle v^2 \rangle &= \frac{3 k_B T}{m} = \frac{3 RT}{M} = \frac{3 PV}{M} = \frac{3 P}{\rho} \end{aligned} \quad (17.12)$$

Con $M = N_A m$ la massa di una mole, ovvero la *massa molare*, e $\rho = M/V$ la densità del gas.

ESEMPIO. Una mole di idrogeno (H_2) a 15°C ha velocità media delle particelle pari a:

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = 1900 \text{ m/s} = 6840 \text{ km/h}$$

Una mole di azoto (N_2) a 15°C ha velocità media delle particelle pari a:

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = 507 \text{ m/s} = 1825 \text{ km/h}$$

Una mole di anidride carbonica (CO_2) a 15°C ha velocità media delle particelle pari a:

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = 404 \text{ m/s} = 1454 \text{ km/h}$$

Poiché $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ e T è costante, notiamo che $\langle \varepsilon \rangle$ è anch'essa costante. Allora usando la relazione $\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$ notiamo che, necessariamente, se aumenta la massa delle particelle, diminuisce la loro velocità. In modo analogo, presa una quantità fissa di gas, all'aumento di temperatura cresce la velocità delle particelle.

17.5 DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ

Abbiamo visto che, conoscendo la temperatura del gas perfetto e la massa delle particelle possiamo ottenere dunque il *velocità quadratica media*:

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = \left(\frac{3k_B T}{m} \right)^{1/2}$$

Ovviamente ciò non coincide con quello effettivo delle particelle. Infatti, se prendiamo a caso una particella, c'è una probabilità di trovarne una con una particolare velocità; l'insieme di queste probabilità determinano la **funzione di distribuzione**. Come possiamo determinarla?

Il **teorema di Boltzmann** afferma che il numero di particelle per quantità di volume n ad un certo stato energetico E è:

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} \quad (17.13)$$

Con n_0 il numero di particelle per volume dello stato fondamentale E_0 e $\Delta E = E - E_0$ la variazione di energia tra gli stati di n e n_0 .

Immaginiamo di prendere due particelle di energia E_1 e E_2 . Poiché nel gas ideale le interazioni avvengono soltanto per *urti*, possiamo immaginare che dopo l'urto le energie siano E'_1 ed E'_2 . La *probabilità* che le due particelle *si urtano* dipende dalle *probabilità* che le due particelle abbiano una *certa energia*.

$$g \propto p(E_1), p(E_2)$$

Questa probabilità g equivale al prodotto di $p(E_1)$ e $p(E_2)$ in realtà, poiché il fatto che una particella abbia energia E_1 non incide sulla possibilità della seconda di averne E_2 : sono due *eventi indipendenti*, quindi, per ragionamenti probabilistici, l'evento g segue il prodotto di $p(E_1)$ e $p(E_2)$.

Inversamente, se due particelle con energia E'_1 e E'_2 interagiscono e assumono energie E_1 e E_2 , si ha che g' equivalente al prodotto di $p(E'_1)$ e $p(E'_2)$.

Supponiamo che il sistema sia in *equilibrio termodinamico*: l'energia complessiva non deve cambiare. Applicando il **principio del bilancio dettagliato**, si deve avere che il numero di particelle che passano da uno stato energetico all'altro è uguale al numero di particelle che, in "verso contrario", passano dall'altro stato energetico a quello precedente. In termine di energia prima e dopo gli urti:

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2$$

Ne consegue, per gli stessi motivi, che $g = g'$, ovvero:

$$p(E_1)p(E_2) = p(E'_1)p(E'_2)$$

Possiamo esprimere le energie E' come le energie E e uno scambio δ , in modo da soddisfare comunque il bilancio energetico:

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 + \delta \\ E'_2 = E_2 - \delta \end{cases}$$

La relazione con le probabilità diventa:

$$p(E_1)p(E_2) = p(E_1 + \delta)p(E_2 - \delta)$$

Supponiamo δ sufficientemente piccolo. Allora:

$$\begin{cases} E_1 \simeq E_1 + \delta \\ E_2 \simeq E_2 - \delta \end{cases}$$

Sviluppando in serie con Taylor:

$$\begin{aligned} p(E_1 + \delta) &\simeq p(E_1) + \delta \left[\frac{\partial p}{\partial E} \right]_{E_1} \\ p(E_2 - \delta) &\simeq p(E_2) - \delta \left[\frac{\partial p}{\partial E} \right]_{E_2} \end{aligned}$$

Segue che:

$$\begin{aligned} p(E_1)p(E_2) &= (p(E_1) + \delta p'(E_1)) \cdot (p(E_2) - \delta p'(E_2)) = \\ &= p(E_1)p(E_2) + p(E_2)\delta p'(E_1) - p(E_1)\delta p'(E_2) + \delta^2 p'(E_1)p'(E_2) + o(\delta^2) \end{aligned}$$

Trascurando, per semplicità, δ^2 , otteniamo:

$$p(E_1)p(E_2) = p(E_1)p(E_2) \left[1 + \delta \left(\frac{p'(E_1)}{p(E_1)} - \frac{p'(E_2)}{p(E_2)} \right) \right]$$

Per essere vera l'equazione, segue che $\delta \left(\frac{p'(E_1)}{p(E_1)} - \frac{p'(E_2)}{p(E_2)} \right) = 0$. Per l'arbitrarietà di E_1 ed E_2 :

$$\frac{p'(E_1)}{p(E_1)} = \frac{p'(E_2)}{p(E_2)} = \frac{p'(E)}{p(E)} = \text{costante}$$

Poniamo allora $\alpha = \frac{1}{p} \frac{dp}{dE}$. Poiché la probabilità di avere energie alte è decisamente minore di avere energie basse, poniamo $\alpha = -\beta$ con $\beta > 0$. Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{p} &= \alpha \int dE \Rightarrow \ln p = \alpha E + C \Rightarrow p(E) = C' e^{\alpha E} \\ p(E) &\propto e^{-\beta E} \end{aligned}$$

Possiamo passare dalla probabilità al numero effettivo di particelle e, da questo, alla densità di oggetti:

$$\frac{p(E_1)}{p(E_2)} = \frac{N(E_1)}{N_{tot}} \frac{N_{tot}}{N(E_2)} = \frac{N(E_1)}{N(E_2)} = \frac{N(E_1)V}{N(E_2)V} = \frac{n(E_1)}{n(E_2)}$$

Allora, la densità di oggetti al livello energetico E_1 rispetto a quello E_2 equivale a:

$$\frac{n(E_1)}{n(E_2)} = e^{-\beta(E_1 - E_2)}$$

Ritrovando la struttura del teorema di Boltzmann. In *tre dimensioni*, limitandoci all'energia cinetica, il numero di particelle dN ad un certo livello di energia è dato da:

$$dN = N_{tot} p(E) dV_{sf}$$

Con N_{tot} il numero totale di particelle, $p(E)$ la probabilità di avere particelle all'energia E e dV_{sf} il volume dello spazio delle fasi.

Una particella può essere identificata da tre coordinate (x, y, z) e tre quantità di moto (q_x, q_y, q_z). Questo corrisponde ad uno spazio a 6 dimensioni, che prende appunto il nome di **spazio delle fasi**. Si può dimostrare che:

$$dV_{sf} = d^3x d^3q$$

Supponendo lo spazio **isotropo**, ovvero uno spazio in cui le particelle non hanno direzioni preferenziali, d^3q si può riscrivere come $q^2 dq$ (ottenuto integrando sulle variabili angolari della velocità nello spazio delle fasi). Poiché abbiamo considerato solo l'energia cinetica, $q^2 = (mv)^2 = E$, ovvero $q = E^{1/2}$ e $dq \propto E^{-1/2} dE$. Allora:

$$q^2 dq = E \frac{dE}{E^{1/2}} = E^{1/2} dE$$

$$dV_{sf} = d^3x E^{1/2} dE$$

Se la densità di particelle per unità di volume è:

$$dn = \frac{dN}{d^3x} = N_{tot} p(E) E^{1/2} dE = N_{tot} e^{-\beta E} E^{1/2} dE$$

Come troviamo β ? Poniamo due condizioni:

$$\int dN = N_{tot}$$

$$\int E dN = E_{tot} = \frac{3}{2} k_B T N_{tot}$$

Scopriamo che, imponendo queste condizioni:

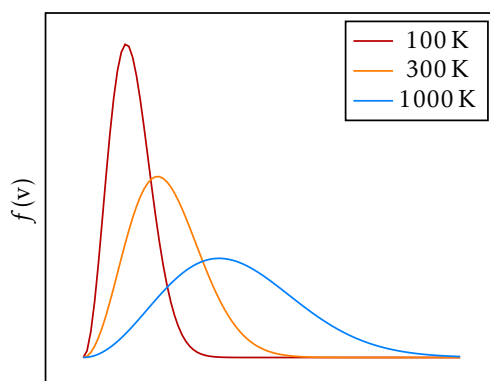
$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

Sostituendo β nell'equazione $\frac{n(E_1)}{n(E_2)} = e^{-\beta(E_1 - E_2)}$ ritroviamo definitivamente il teorema di Boltzmann.

Nel caso specifico dell'energia cinetica $E = \frac{1}{2}mv^2$, si ha che $E^{1/2} dE \propto v dv$, dato che dE implica dv per definizione. Ma allora possiamo anche vedere l'equazione che descrive il numero di particelle ad una certa velocità v , la **distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann**:

$$f(v) dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v dv \quad (17.14)$$

Distribuzione di Maxwell-Boltzmann per l'idrogeno a temperature differenti.



Possiamo caratterizzare diverse velocità tipiche. La **velocità quadratica media**, come abbiamo già visto, è:

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = \left(\frac{3k_B T}{m} \right)^{1/2} \quad (17.15)$$

La **velocità più probabile** è la velocità che, per l'appunto, si presenta in più particelle. Data la distribuzione, essa si verifica quando $f(v)$ assume il suo massimo, ovvero:

$$\frac{df}{dv} = 0$$

$$v_0 = \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{1/2} \quad (17.16)$$

La **velocità media**, da non confondersi con la velocità *quadratica media*, è data dalla media su tutte le velocità dello spettro di distribuzione:

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} v f(v) dv}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0 = \left(\frac{8k_B T}{m} \right)^{1/2} \quad (17.17)$$

Mettendole, in ordine, scopriamo che:

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} > \langle v \rangle > v_0$$

ESEMPIO. PRESSIONE IPSOMETRICA. La **pressione in forma ipsometrica**, già vista in precedenza (sez. 10.2.1.1, pag. 102), non è altro che un caso particolare del teorema di Boltzmann. La formula è:

$$P(h) = P_0 e^{-\rho g h / \rho_0} \quad (17.18)$$

Tuttavia, per una mole di gas:

$$P_0 = \frac{RT}{V_0} = \frac{\rho_0}{M} RT = \rho_0 \frac{R}{N_A} T = \frac{\rho_0 k_B T}{m}$$

Con M la massa molare che, se abbiamo una mole sola, è pari a $N_A m$. Allora:

$$\frac{\rho_0}{P_0} = \frac{m}{k_B T}$$

$$P(h) = P_0 e^{-mgh/k_B T}$$

La pressione, tuttavia, l'abbiamo anche ricavata in base all'energia cinetica media della singola particella:

$$P = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle$$

Poiché a parità di temperatura $\langle \varepsilon \rangle$ è costante, si ha che $P \propto n$, con n la densità delle particelle. La forma ipsometrica risulta:

$$n(h) = n_0 e^{-mgh/k_B T}$$

Ma questo non è altro che il teorema di Boltzmann, usando la variazione di *energia potenziale* $\delta E = mgh$.

17.6 GRADI DI LIBERTÀ E CALORI SPECIFICI

La temperatura è associata, come abbiamo visto, all'energia cinetica delle particelle. L'energia cinetica esatta di una particella è, molto semplicemente:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$$

Questa velocità v si può scomporre nelle componenti cartesiane:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

La velocità quadratica media si può altrettanto esprimere come la media delle componenti cartesiane quadratiche:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle$$

Se lo spazio è *isotropo*, non c'è una direzione privilegiata, dunque possiamo supporre che $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, e dunque:

$$\langle v^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle = 3\langle v_y^2 \rangle = 3\langle v_z^2 \rangle$$

Segue quindi:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}m\langle v_x^2 \rangle = \frac{3}{2}m\langle v_y^2 \rangle = \frac{3}{2}m\langle v_z^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

Ma allora:

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}m\langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{2}m\langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

La particella di un gas monoatomico, poiché si può muovere nelle tre dimensioni, ha **tre gradi di libertà**: per ciascuno di questi gradi di libertà è associato $\frac{1}{2}k_B T$. Generalizzando per il **principio di equipartizione dell'energia** abbiamo che, per g gradi di libertà, si ha un'energia cinetica media:

$$\langle \varepsilon_g \rangle = \frac{g}{2}k_B T \quad (17.19)$$

Il caso *monoatomico*, che avevamo visto col teorema del viriale, ha **tre** gradi di libertà e quindi:

$$\langle \varepsilon_3 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

Una **molecola biatomica** ha i **tre** gradi di libertà conosciuti (il movimento espresso in componenti x , y , z), ma può anche ruotare attorno ad un qualsiasi *asse* arbitrario rispetto a **due angoli di Eulero**. Ma allora $g = 5$, quindi:

$$\langle \varepsilon_5 \rangle = \frac{5}{2}k_B T$$

Queste considerazioni ci permettono di dimostrare i valori dei calori specifici dei gas perfetti.

Sappiamo che l'energia interna è $U = U_0 + c_V T$. Prendiamo una mole di particelle monoatomiche ($g = 3$); allora questa energia interna si può esprimere come la *somma delle energie cinetiche* di tutte le particelle, ovvero:

$$U = \frac{3}{2}k_B N_A T$$

Derivando, $dU = \frac{3}{2}k_B N_A dT$. Ma ci è noto che $dU = c_V dT$; dovendo essere uguali, segue che:

$$c_V = \frac{3}{2}k_B N_A = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} N_A = \frac{3}{2}R$$

Inoltre, scopriamo che *in questo caso* $U_0 = 0$, mentre dalla relazione di Mayer ricaviamo che $c_P = \frac{5}{2}R$ come previsto.

In generale, se $g \neq 3$:

$$U = \frac{g}{2}k_B N_A T = \frac{g}{2}RT \quad (17.20)$$

17.6.1 La crisi dei calori specifici

Sorge un *problema fondamentale* con questi risultati: **non sempre funzionano bene**. Ad esempio, con ciò che abbiamo visto si potrebbe supporre che i calori specifici c_V siano indipendenti dalla temperatura. Invece, si è scoperto che sono in funzione della temperatura:

$$c_V = f(T)$$

Per un gas biatomico:

- Per $T \sim 200 - 300$ K: $C_v = \frac{5}{2}R$, uguale a quello previsto.
- Per $T \gg 300$ K: $C_v = \frac{6}{2}R = 3R$, ovvero si aggiunge un grado di libertà.
- Per $T \ll 300$ K: $C_v = \frac{3}{2}R = 3R$, perde due gradi di libertà e si comporta come un gas monoatomico.

A temperature molto basse sembrerebbe che la molecola perda la possibilità di ruotare attorno ad un asse, mentre a temperature alte abbiamo un grado in più che possiamo immaginare come un *grado vibrazionale*.

Analogamente, per i solidi in un reticolo cristallino abbiamo in condizioni normali l'energia potenziale E_{pot} (che è data dai rapporti elettrostatici fra gli ioni e sono energie potenziali, come fossero delle molle) pari all'energia cinetica E_{cin} , quindi l'energia totale di una particella risulta:

$$E_{tot} = E_{pot} + E_{cin} = 2E_{cin} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}k_B T = 3k_B T$$

Immaginando lo ione come particella puntiforme, l'energia interna complessiva è:

$$U = nN_A 3k_B T$$

In funzione della temperatura il calore specifico è costante, e risulta:

$$c = 3nR = 6n \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1} \text{K}^{-1}$$

Si scopre però che questo, a temperature basse (inferiori della **temperatura di Debye** θ) **non** diminuisce secondo la **legge di Dulong-Petit**.

Perché a temperature particolarmente basse o alte il modello microscopico finora visto non va più bene? Questa **crisi dei calori specifici** rimase incompresa nei limiti della Fisica classica; fu risolta soltanto con i principi della **meccanica quantistica**.

Nella *meccanica classica* l'energia è una funzione *continua*: essa può assumere tutti i valori possibili. Nel mondo microscopico della meccanica quantistica solo certi *livelli di energia* sono permessi, ovvero l'energia è *discreta*.

Questo succede, ad esempio, nei livelli *energetici degli atomi*, oppure in quelli *rotazionali* della molecola diossigeno. Infatti, alla rotazione è associata un'energia E : a temperatura *troppo basse* questa **natura discreta** dell'energia si nota molto di più. Al contrario, a

temperature *alte ma normali* i livelli sono molto *fitti* e possiamo trattarla funzionalmente come se fosse *continua*. Possiamo definire quindi l'ultimo livello energetico E_0 , sotto il quale il corpo *non ha abbastanza energia* per ruotare.

Per il fenomeno *vibrazionale* si ha un'energia fondamentale tipicamente *molto più alta* di quella rotazionale, pertanto a temperatura ambiente non può verificare. Questo spiega anche il *problema del calore specifico dei solidi* che, a temperature basse, perdono l'energia necessaria per *mantenere* i loro gradi di libertà.

17.7 PROBABILITÀ E REVERSIBILITÀ

L'intuizione più geniale di *Ludwig Boltzmann* nell'interpretazione microscopica dei fenomeni termodinamici fu quella di aver capito che l'*irreversibilità* e la *reversibilità* sono strettamente legate alla **probabilità** di realizzare a livello *microscopico* uno stato *macroscopico*. Secondo questa intuizione:

“Un sistema termodinamico evolve nella direzione dello stato che ha la massima probabilità di configurarsi.”

Prendiamo ad esempio l'*espansione libera di Joule* e supponiamo di avere solo 4 particelle. Possiamo distribuire nella bocca n_1 (dove originalmente è contenuto il gas) e nella bocca n_2 (quello inizialmente vuota) il gas in diversi modi.

n_1	n_2	modi
0	4	1
1	3	4
2	2	6
3	1	4
4	0	1

Nel *primo* e *ultimo* caso abbiamo *solo un modo* possibile, ovvero mettere tutte le particelle in una delle bocce. Nel secondo caso, poiché in una bocca ho una sola particella, ho *quattro* configurazioni distinte; analogo è il *penultimo* caso.

Nel caso centrale, abbiamo *sei* casi. Infatti, dovendo *combinare* 4 particelle in gruppi da 2, si ha:

$$C^{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

Anche gli altri casi potevamo calcolarli con le combinazioni:

$$C^{4,0} = \binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = 1 = \frac{4!}{4!0!} = \binom{4}{4} = C^{4,4} \quad C^{4,1} = \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4 = \frac{4!}{3!1!} = \binom{4}{3} = C^{4,3}$$

La probabilità di questi stati è, per definizione:

$$p = \frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}$$

Generalizzando, i *casi possibili* sono 2^N , avendo due possibili volumi su cui distribuire N particelle.

DIGRESSIONE. Per ogni particella posso scegliere uno di due possibili volumi. Allora, per la prima particella ho *due* casi; la seconda particella, indipendentemente dalla prima, può andare nel volume n_1 o n_2 . Allora ho due possibili modi di disporre la seconda molecola in ciascuno dei due casi in cui si può presentare la prima. Iterando questo ragionamento, per N particelle ho 2^N .

I *casi favorevoli* sono $\binom{N}{N_1} = \binom{N}{N_2} = \frac{N!}{N_1!N_2!}$, con N_1 il numero di particelle in n_1 e $N_2 = N - N_1$ quelle in n_2 . Allora:

$$p = \frac{N!}{N_1!N_2! 2^N}$$

Nel caso $N=4$, abbiamo i valori in tabella. Notiamo che la probabilità maggiore è nel caso $N_1 = N_2 = \frac{N}{2}$. Si dimostra per il caso generale vale lo stesso risultato:

$$p\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!} \cdot \frac{1}{2^N}$$

Usando l'approssimazione di Stirling:

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad N \rightarrow +\infty$$

Otteniamo:

$$p\left(\frac{N}{2}\right) \approx \frac{\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N}{\left[\sqrt{2\pi \frac{N}{2}} \left(\frac{N}{2e}\right)^{\frac{N}{2}}\right]^2} \cdot \frac{1}{2^N} = \frac{\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N}{\pi N \left(\frac{N}{e}\right)^N \frac{2^{-N}}{2^N}} \cdot \frac{1}{2^N} = \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2^N}$$

Questa probabilità è molto maggiore rispetto a quella di avere tutte le particelle da una parte o l'altro. Infatti, per una mole di gas ($N = N_A$):

$$\left(\frac{2}{\pi \cdot 10^{23}}\right)^{\frac{1}{2}} \gg \frac{1}{2^{10^{23}}}$$

Si può anche vedere la probabilità della **fluttuazione** η tra il numero di particelle N_1 e N_2 :

$$p(\eta) d\eta = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{N}{2}\eta^2} d\eta$$

Con $\eta = \frac{N_1 - N_2}{N}$. Preso un N piccolo, ad es. $N = 2 \times 10^6$, la probabilità di una fluttuazione comunque abbastanza alta (del rango di 10^{-2}) è:

$$p(\eta > 10^{-2}) = 10^{-44}$$

Per un $N = 10^{22}$, si ha per fluttuazione abbastanza alta (del rango di 10^{-6}):

$$p(\eta > 10^{-6}) = 10^{-10^{10}}$$

La probabilità che le particelle all'equilibrio possano fluttuare in maniere relativamente consistente, cioè deviare dallo stato $N_1 = N_2$, è praticamente nulla.

Allora l'intuizione di Boltzmann fu di associare lo stato di *equilibrio macroscopico* allo stato *più probabile* a livello microscopico; stati di sbilancio sono in natura *improbabili*.

Questa considerazione ci porta ad un **parallelismo** tra la *probabilità* e l'*entropia*. Entrambe, in un sistema adiabatico, tendono ad aumentare. Ovviamente ci sono alcune differenze: l'entropia è *additiva*, dato che $S_{tot} = S_1 + S_2$, mentre la probabilità è *moltiplicativa* se gli eventi sono indipendenti ($p_{tot} = p_1 p_2$). Tuttavia, il *logaritmo* ha proprietà che collegano somma e addizione. Allora, la relazione più diretta è tra il *logaritmo della probabilità* e l'*entropia*.

Ciò dà origine al **teorema H di Boltzmann**; si può dimostrare che data la probabilità π di un macrostato, l'entropia S del sistema con quel macrostato è dato da:

$$S = k_B \ln \pi + S_0 \quad (17.21)$$

Ovviamente, nel caso di una variazione di entropia:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k_B \ln \frac{\pi_2}{\pi_1} \quad (17.22)$$

ESEMPIO. Verifichiamo il teorema H applicandolo all'espansione libera di Joule. Sappiamo per una mole di gas perfetto monoatomico che:

$$S = S_0 + c_V \ln TV^{\gamma-1}$$

Con $c_V = \frac{3}{2}R$ e $\gamma = \frac{5}{3}$. L'entropia, noto che $V_2 = V_1$, risulta:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{3}{2}R \ln [T(2V)^{\gamma-1}] - \frac{3}{2}R \ln [TV^{\gamma-1}] = \\ &= \frac{3}{2}R \ln [T(2V)^{2/3}] - \frac{3}{2}R \ln [TV^{2/3}] = \\ &= R \ln [T^{3/2}(2V)] - R \ln [T^{3/2}V] = \\ &= R \ln \frac{T^{3/2}2V}{T^{3/2}V} = R \ln 2 \end{aligned}$$

A livello *macroscopico* avevamo già ottenuto questo risultato. A livello *microscopico* utilizziamo il teorema H di Boltzmann.

$$\Delta S = k_B \ln \frac{\pi_2}{\pi_1}$$

Ovviamente lo stato finale π_2 è quello che abbiamo visto come il più probabile:

$$\pi_2 = \frac{N!}{[(N/2)!]^2} \frac{1}{2^N}$$

Lo stato iniziale corrisponde al caso delle particelle tutte poste in una boccia:

$$\pi_1 = \frac{1}{2^N}$$

$$\Delta S = k_B \ln \frac{N!}{[(N/2)!]^2} = k_B \left[\ln N! - 2 \left(\frac{N}{2} \right)! \right]$$

Usando la seguente approssimazione:

$$\ln N! \sim N(\ln N - 1) \quad N \rightarrow +\infty$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta S &= k_B \left[N(\ln N - 1) - 2 \frac{N}{2} \left(\ln \frac{N}{2} - 1 \right) \right] = \\ &= k_B [N(\ln N - 1) - N(\ln N - 1 - \ln 2)] = k_B N \ln 2 \end{aligned}$$

Se $n = 1$, $N = N_A$ e dato che $k_B = \frac{R}{N_A}$, segue:

$$\Delta S = \frac{R}{N_A} N_A \ln 2 = R \ln 2$$

Ottenendo il risultato già visto. Inoltre, noto che:

$$\Delta S = k_B \ln \frac{\pi_2}{\pi_1} = R \ln 2$$

Si ha che:

$$\frac{\pi_2}{\pi_1} = 2^{R/k_B} = 2^{N_A} = 2^{6 \cdot 10^{23}} \sim 10^{1,8 \cdot 10^{23}}$$

π_2 è enormemente più grande di π_1 , che rende il fatto di avere il caso di π_1 sostanzialmente impossibile da verificarsi in natura.

17.8 IL TERZO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Abbiamo visto che l'entropia per il teorema H di Boltzmann è:

$$S = k_B \ln \pi + S_0$$

Quanto vale S_0 ? Questo ce lo dice il **terzo principio della Termodinamica** o **principio di Nernst**, che afferma fra le sue conseguenze che:

$$S_0 = 0 \quad (17.23)$$

Non lo dimostreremo in questa sede, ma cercheremo di intuirne il perché.

Quando la temperatura tende allo zero assoluto (0 K), i calori specifici c abbiamo visto che tendendo anch'essi a 0. Per definizione $c = \frac{\delta Q}{dT}$; a queste temperature si dimostra, usando la meccanica quantistica, che la legge diventa:

$$c_V = aT^3 \Rightarrow \delta Q = aT^3 dT$$

Poiché:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = aT^2 dT$$

L'entropia tende a 0 per T che tende a 0. Se integriamo dS :

$$\int dS = \int 0 dT \Rightarrow S = \text{costante per } T \rightarrow 0$$

Allora fissata che $S_0 = \text{costante} = 0$ ci porta a dire la formulazione definitiva del teorema H di Boltzmann:

$$S = k_B \ln \pi \quad (17.24)$$

Immaginiamo di poter arrivare allo zero assoluto. Le particelle dovrebbero stare ferme, dato che $T = 0$ implica che:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T = 0 \Rightarrow \langle v^2 \rangle = 0$$

Esiste un *unico macrostato possibile* e ho la certezza della *disposizione* delle particelle, dunque $\pi = 1$. Ma allora $S = k_B \ln \pi = k_B \ln 1 = 0$, ovvero ho un sistema ad *entropia nulla*. Se so che le particelle hanno *velocità nulla*, sono certo delle loro *posizioni* x .

Conosco dunque con certezza gli insiemi delle posizioni e delle velocità $\{\vec{x}\}$, $\{\vec{v}\}$. Questo, a livello *quantistico*, **non** è concesso in quanto, per il *principio di Heisenberg*, se conosco la posizione delle particelle con incertezza Δx nulla, l'incertezza delle velocità Δv è infinita e viceversa. **Non** posso conoscere di preciso sia le posizioni, sia le velocità. Ne consegue che $T = 0$ K è impossibile da raggiungere. Ma allora, possiamo affermare che:

“Non possiamo avere un sistema termodinamico con entropia pari a zero.”

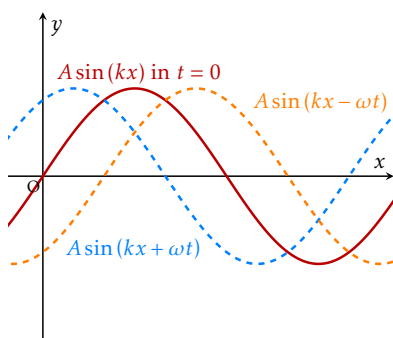
ONDE MECCANICHE

“Alcuni hanno un orecchio musicale raffinato, altri per la musica hanno l’orecchio di Van Gogh.”

BILLY WILDER, insegnante di musica.

18.1 ONDE MECCANICHE

UN’ONDA è uno spostamento *periodico* attorno ad una *posizione di equilibrio*. Una corda che oscilla compie per ogni suo punto uno spostamento periodico attorno all’equilibrio, la corda piatta. Questi spostamenti possono essere *arbitrari*, ma il **teorema di Fourier** ci afferma che una funzione periodica può essere scritta come una serie di infiniti *termini sinusoidali*:



$$f(x) = \sum a_n \sin(nx) \quad (18.1)$$

Dunque lo studio delle onde si riduce all’analisi delle **onde sinusoidali** della forma:

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t) \quad (18.2)$$

Possiamo leggere la funzione nelle coordinate spaziali e temporali, rappresentando nel piano Oxy la funzione al tempo t .

Dopo un tempo t la funzione si sposterà di un certo tratto:

- A *destra* se viene descritta dall’argomento $kx - \omega t$.
- A *sinistra* se viene descritta dall’argomento $kx + \omega t$.

La lunghezza che descrive la sinusoide sull’asse x viene detta **lunghezza d’onda**:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (18.3)$$

k si chiama **numero d’onda**.

Se ci fissiamo su un punto materiale soggetto all’oscillazione esso raggiungerà il massimo, oscillerà verso il minimo per poi tornare all’equilibrio (per poi ripetere la sequenza).

Questo punto impiega in questo suo moto un tempo che chiamano **periodo**:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (18.4)$$

ω prende il nome di **pulsazione**. L'inverso è la **frequenza**, che indichiamo con la lettera greca ν ("ni") si misura in Hz (leggasi "hertz"):

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (18.5)$$

18.1.1 Velocità dell'onda

Prendiamo un'onda che si sposta da destra verso sinistra (argomento $kx - \omega t$); il *massimo* di essa si sposta di una *lunghezza d'onda* in un tempo pari al periodo T , dunque si ha una **velocità di propagazione dell'onda** pari a:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \quad (18.6)$$

Questa è chiaramente *diversa* dalla velocità con cui si muove il *punto materiale* nel tempo *attorno* al punto di equilibrio:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \pm \omega A \cos(kx \pm \omega t) \quad (18.7)$$

Abbiamo due famiglie di onde in base alla velocità:

- **ONDE TRASVERSALI:** $\vec{v}_y \perp \vec{v}$
- **ONDE LONGITUDINALI:** $\vec{v}_y // \vec{v}$

ESEMPIO. L'onda generata dalla **corda** che oscilla è *trasversale*: le particelle si muovono perpendicolarmente.

ESEMPIO. Il **suono** è un'onda di *compressione* e *rarefazione* del mezzo, quindi è un'onda *longitudinale*.

18.1.2 Equazione d'onda di d'Alembert

Immaginiamo una *sbarra* solida perturbata da un qualcosa (ad es. un martello) al suo capo sinistro e consideriamo una posizione x generica e una successiva $x + \delta x$. Si viene a creare una forza di compressione $F(x)$ da sinistra sul volume delimitato dalle due posizioni, mentre da destra se ne oppone una $F(x + \delta x)$ sullo stesso volume. La forza complessiva è, per un $\delta x \rightarrow 0$:

$$F = F(x + \delta x) - F(x) \simeq \frac{dF}{dx} \delta x$$

Ma una forza applicata su una superficie definisce uno *sforzo* $\sigma = \frac{F}{A}$, ovvero $F = \sigma A$ con A la *sezione* della sbarra.

L'elemento ha *massa*:

$$m = \rho A \delta x$$

A cui associamo la *quantità di moto*:

$$q = mv = \rho A \delta x \frac{\partial S}{\partial t}$$

Con $S(x, t)$ lo *spostamento* del punto materiale. Ma la forza allora è, come sappiamo, la *derivata* rispetto al tempo della quantità di moto:

$$F = \frac{dq}{dt} = \rho A \delta x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

Segue che:

$$F = \frac{dF}{dx} \delta x = \frac{d}{dx} (\sigma A) \delta x = A \frac{d\sigma}{dx} \delta x = \alpha A \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \delta x$$

Quest'ultima equivalenza deriva dalla *legge di Hooke* (sez. 3.6.3, pag. 42), in quanto $\sigma = \alpha \frac{\partial S}{\partial x}$ nel caso tridimensionale. Pertanto:

$$\begin{aligned} \cancel{\rho A \delta x} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} &= F = \alpha A \cancel{\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \delta x} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} &= \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Si vede che la velocità di propagazione dell'onda nel solido è tale che $v^2 = \frac{\rho}{\alpha}$, da cui segue la **legge di d'Alambert**:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad (18.8)$$

La soluzione di questa equazione differenziale è:

$$S(x, t) = f_2(x - vt) + f(x + vt)$$

In generale, due funzioni che soddisfano queste equazioni descrivono delle **onde di d'Alambert**.

Presa un'onda $f(x - vt) = A \sin(kx - \omega t)$, abbiamo verificato che nel *mezzo materiale* la **velocità di propagazione dell'onda** è:

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} \quad (18.9)$$

Con α il coefficiente elastico della *legge di Hooke* e ρ la densità del mezzo. In un qualsiasi mezzo possiamo generalizzare e dire che la velocità di propagazione è legata ad un **fattore elastico** ed ad uno **inerziale**:

$$v = \sqrt{\frac{\text{fattore elastico}}{\text{fattore inerziale}}} \quad (18.10)$$

18.1.3 Velocità del suono

L'onda sonora con quale velocità si propaga? A differenza di *Newton*, che sulla natura del suono sbagliò supponendo che fosse la conseguenza di una *compressione isoterma* dell'aria, ora sappiamo che invece è dovuta a compressioni *adiabatiche*.

Abbiamo introdotto in precedenza il *coefficiente di compressione* (sez. 9.2.2, pag. 97); qui utilizziamo l'analogo *coefficiente termometrico di compressione adiabatica*:

$$B = -\frac{V}{dV} dP$$

Questo rappresenta il nostro *fattore elastico*, mentre quello *inerziale* rimane comunque la *densità*. Allora, per i ragionamenti precedenti si avrà:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Quanto vale B ? Poichè le compressioni sono adiabatiche, se l'aria si suppone come gas perfetto vale la *legge di Poisson*:

$$PV^\gamma = \text{cost}$$

Allora sappiamo che $\frac{dP}{dV}(PV^\gamma) = \frac{dP}{dV}\text{cost} = 0$; sviluppando la *derivata* della legge di Poisson:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dV}(PV^\gamma) &= \frac{dP}{dV}(PV^\gamma) = \frac{dP}{dV}V^\gamma + P\gamma V^{\gamma-1} = 0 \\ \frac{dP}{dV} &= -\frac{P\gamma}{V} \end{aligned}$$

Ovvero:

$$-V \frac{dP}{dV} = P\gamma$$

Cioè:

$$B = \gamma P$$

La velocità di propagazione risulta dunque:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

Se il gas è perfetto, vale per la *legge dei gas perfetti* $P = \frac{nRT}{V}$. Poniamo $n = 1$ e, sapendo che $m = V\rho$ otteniamo:

$$v^2 = \gamma \frac{nRT}{V\rho} = \frac{\gamma RT}{m}$$

Con buona approssimazione, supponiamo che l'aria sia composta circa di azoto (N_2) all'80% e di ossigeno (O_2) al 20% con percentuali di altri gas trascurabili. Essendo entrambi gas con molecole biatomiche $\gamma = 7/5$; se la temperatura è $T \approx 273$ K e la massa molare è $M = 29$ g/mol, si ha:

$$v = 330 \text{ m/s}$$

18.2 ENERGIA DI UN'ONDA

Proviamo a stimare l'*energia trasportata* da un'onda. Prendiamo il caso semplice della *corda* che oscilla. Un punto che in un istante è al massimo, dopo un periodo T avrà compiuto un'*oscillazione* completa.

L'energia cinetica del punto P è:

$$K_P = \frac{1}{2}mv_y^2 \quad (18.11)$$

Mentre l'energia potenziale associata all'oscillazione è:

$$U_P = \frac{1}{2}k'y^2 \quad (18.12)$$

Nei *massimi* e nei *minimi* della sinusoide abbiamo velocità nulla mentre la distanza dell'equilibrio è massima, ovvero l'ampiezza:

$$K_P = 0 \quad U_P = \frac{1}{2}k'A^2$$

Mentre nell'equilibrio la velocità è massima, mentre il punto non ha energia potenziale:

$$K_P = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad U_P = 0$$

Supponendoci in assenza di attriti, l'energia meccanica si conserva, cioè:

$$E_M = K_P + U_P = \frac{1}{2}k'A^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \text{cost} \quad (18.13)$$

Come varia la *distribuzione di energia nel tempo*? Sappiamo che:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -A \cos(kx - \omega t)$$

Se $y = 0$ si ha $v_y = v_{max}$. Ma poiché questo si verifica per $y = 0$:

$$y = A \sin(kx - \omega t) = 0 \Rightarrow kx - \omega t = 0 \Rightarrow \cos(kx - \omega t) = 1$$

$$v_{max} = -A\omega \quad (18.14)$$

Allora, l'energia totale è pari a:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}mA^2\frac{4\pi^2}{T^2} = 2A^2m\pi^2\nu^2$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = 2A^2m\pi^2\nu^2 \quad (18.15)$$

Ci conviene associare all'onda una **densità di energia**. Per una *corda*, essa è:

$$\frac{E_{tot}}{l} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\frac{1}{l}$$

Per le *onde sonore* è:

$$\frac{E_{tot}}{V} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\frac{1}{V}$$

Nelle formule precedenti m/l e m/V rappresentano delle *densità* (lineari o volumiche). La **densità di energia totale** è:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \quad (18.16)$$

Essa dipende dunque dalla *densità* del mezzo, dall'*ampiezza* e dalla *pulsazione* dell'onda.

18.2.1 Potenza di un'onda

La **potenza dell'onda** è:

$$P = \mathcal{E}Sv = \mathcal{E}S\frac{\lambda}{T} = \mathcal{E}S\frac{\omega}{k} \quad (18.17)$$

Con S la sezione di attraversamento dell'onda e v la velocità di propagazione dell'onda.

18.2.2 Intensità di un'onda

Ci interessa inoltre definire l'**intensità dell'onda**, rappresenta la potenza per superficie di attraversamento.

$$I = \frac{P}{S} = \mathcal{E}v = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2v \quad (18.18)$$

L'intensità si misura in W/m^2 (leggasi "watt al metro quadro") e ha dimensione $[I] = [MT^{-3}]$. Questo risultato che abbiamo ottenuto è vero per un'onda *monocromatica* (o sinusoidale).

Prendiamo una *sorgente isotropa*, ovvero che emette onde in tutte le direzioni. I **fronti d'onda** che partono dalla sorgente coprono ad un certo raggio una superficie sferica S_1 ,

mentre ad un raggio maggiore R_2 coprono una superficie sferica S_2 più larga. Poiché l'energia si conserva se l'onda non incontra nulla nel suo percorso, anche la potenza deve conservarsi ($P_1 = P_2$). Ma allora $I_1 S_1 = I_2 S_2$. Sapendo che, per sorgenti isotrope $S_1 = 4\pi R_1^2$ e $S_2 = 4\pi R_2^2$, ne consegue che:

$$I_2 = I_1 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \quad (18.19)$$

L'intensità dell'onda dunque diminuisce con il quadrato della distanza.

18.2.2.1 Intensità del suono

Applicando il concetto di intensità alle onde sonore, non usiamo i W/m^2 , ma riferiamo i ragionamenti alla *sensibilità dell'orecchio umano*. Fissata un'intensità di riferimento:

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \quad (18.20)$$

Data un'intensità I , definiamo il livello di **intensità sonora**:

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (18.21)$$

Pur essendo una quantità adimensionale, gli assegniamo un'unità di misura logaritmica, B (leggasi "bel"), ma più comunemente si usano i dB (leggasi "decibel"), ovvero la decima parte del bel. Essa è tale che, per $I = I_0$, si abbia un'intensità sonora di $0 \text{ B} = 0 \text{ dB}$; le intensità che presentano una *variazione* di un fattore 10^n rispetto a quella di riferimento hanno una variazione di β di $10 \cdot n$.

ESEMPIO. Se $I/I_0 = 10^7$, allora $\beta = 10 \log_{10} 10^7 = 10 \cdot 7 = 70 \text{ dB}$.

L'orecchio umano, per quanto complesso, ha delle limitazioni strutturali. Consideriamo l'intensità sonora in funzione delle *frequenze*.

- Per frequenze comprese fra 20 Hz e 20 kHz l'orecchio umano può *percepire* suoni.
- Per frequenze minori di 20Hz abbiamo gli **infrasuoni**.
- Per frequenze maggiori di 20kHz abbiamo gli **ultrasuoni**.

Infrasuoni e ultrasuoni non sono udibili dagli umani, ma per altri animali si hanno altri intervalli di frequenze udibili.

Inoltre, non tutte le intensità sono adatte per l'orecchio umano.

- Al di sotto di una *soglia* di intensità ($< 10^{-12} \text{ W/m}^2$) l'orecchio umano non percepisce suoni perché troppo deboli.
- Al di sopra della **soglia del dolore**, il *timpano* dell'orecchio umano non è in grado di sostenere il suono e può danneggiarsi irreparabilmente.

ESEMPIO. Per una frequenza di 1000 Hz si ha un *intervallo di udibilità* $\beta \in [0, 120] \text{ dB}$. Sopra i 120 dB superiamo la soglia del dolore.

18.2.2.2 Orecchio umano e timpano

L'uomo è in grado di sentire suoni grazie al **timpano**. Esso infatti è una membrana messa in moto dalle *compressioni dell'aria* che lo *raggiungono*, trasformando questo *movimento della membrana* in *impulsi elettrici* che vengono spediti al cervello e *decodificati* come

segnale sonoro.

Sappiamo che la velocità di propagazione del suono è tale che:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Con B il coefficiente termometrico di compressione adiabatiche, che è pari a:

$$-B = \frac{V}{dV} dP$$

Immaginiamo di prendere dell'aria nel *condotto* dell'orecchio (per semplicità orizzontale di sezione costante A); l'onda comprime e dirada dei *volume infinitesimi* $V = Adx$ di uno spazio ds , ovvero:

$$dV = Ads$$

Ma allora sappiamo che:

$$\begin{aligned} \frac{V}{dV} dP &= \frac{\cancel{A}dx}{\cancel{A}ds} dP = -B = -\rho v^2 \\ dP &= -\rho v^2 \frac{\partial s}{\partial x} \end{aligned}$$

L'orecchio umano può sopportare una *variazione di pressione massima* di $\Delta P = 28$ Pa. Di quanto oscilla il timpano allora? Se $S = A' \cos(kx - \omega t)$, allora:

$$\begin{aligned} dP &= \rho v^2 A' k \sin(kx - \omega t) \\ dP_{max} &= \rho v^2 A' k \end{aligned}$$

Poichè k è il numero d'onda, si ha che $k = 2\pi v/\lambda$, ottenendo:

$$A' = \frac{dP_{max}}{2\pi \rho v \lambda}$$

Con A' l'oscillazione massima della membrana. Se la densità dell'aria è $1,21 \text{ kg/m}^3$ e la velocità del suono è 343 m/s con frequenza 10^3 Hz , allora:

$$A' = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 11 \text{ } \mu\text{m}$$

Dunque, se $dP > 28 \text{ Pa}$ il timpano si *danneggia*! Possiamo quindi affermare che alla variazione di pressione corrisponde una *variazione di intensità* e quindi alle *soglie uditive* che abbiamo visto.

Qual è l'oscillazione massima della membrana rispetto alla *pressione minima* percepita dal timpano? La pressione minima è $2,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$, ben 6 ordini di grandezza in meno. Allora anche A' è di sei ordini di grandezza minore di quella vista prima, ovvero:

$$A' = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 11 \text{ pm} = 0,1 \text{ raggio atomico}$$

Il timpano è una membrana *estremamente sensibile*.

18.3 EFFETTO DOPPLER

Sia S una sorgente che si muove nel mezzo verso un ricevitore R fisso emettendo continuamente onde. I fronti d'onda fra la sorgente e il ricevitore sono più ravvicinati rispetto a quelli in direzione opposta.

Nell'intervallo $|\vec{v} - \vec{v}_S|t$ (con \vec{v} la velocità di propagazione dell'onda e \vec{v}_S la velocità della sorgente) ci sono un numero di fronti d'onda, e quindi una frequenza, proporzionale a questo intervallo:

$$\nu_S \propto |\vec{v} - \vec{v}_S|t$$

Analogamente, se la sorgente è fissa ma il ricevitore è in movimento verso di essa avremo:

$$\nu_R \propto |\vec{v} - \vec{v}_R|t$$

Con \vec{v}_R la velocità del ricevitore. Scriviamo dunque la proporzione:

$$\frac{\nu_S}{\nu_R} = \frac{|\vec{v} - \vec{v}_S|}{|\vec{v} - \vec{v}_R|}$$

Da cui otteniamo la relazione tra la frequenza percepita dal ricevitore ν_S e quella emessa dalla sorgente ν_R :

$$\nu_R = \nu_S \frac{|\vec{v} - \vec{v}_R|}{|\vec{v} - \vec{v}_S|} \quad (18.22)$$

In generale se la sorgente o il ricevitore si allontanano l'un dall'altro la frequenza percepita dal ricevitore decrescerà:

- \vec{v}_R è negativo se si avvicina alla sorgente, positivo se si allontana dalla sorgente.
- \vec{v}_S è negativo se si allontana dal ricevitore, positivo se si avvicina al ricevitore.

ESEMPIO.

- Se $\vec{v}_R = 0 = \vec{v}_S$, $\nu_R = \nu_S$.
- Se la sorgente e il ricevitore si avvicinano: $\nu_R = \nu_S \frac{v + v_R}{v - v_R} > \nu_S$
- Se la sorgente e il ricevitore si allontanano: $\nu_R = \nu_S \frac{v - v_R}{v + v_R} < \nu_S$

Questo che abbiamo enunciato è il fenomeno dell'**effetto Doppler**, che è dovuto ad un sistema di riferimento privilegiato, cioè quello del mezzo entro cui l'onda si propaga.

DIGRESSIONE. Questo non è vero per le onde elettromagnetiche, dato che non è necessario la presenza di un mezzo per propagarsi. Tuttavia, esiste una versione dell'effetto Doppler anche per le onde elettromagnetiche, ma è differente da quello enunciato qui.

ESEMPIO. ESAME ECO-DOPPLER. In ambito medico, possiamo misurare il flusso sanguigno proprio con l'effetto Doppler. Se un'onda sonora colpisce un globulo rosso in movimento all'interno del vaso sanguigno, essa verrà riflessa e percepita da un ricevitore. Poiché la frequenza riflessa ricevuta è diversa da quella emessa, dalla loro differenza posso ricavare la velocità dei globuli rossi e di conseguenza il flusso sanguigno.

18.4 SOVRAPPOSIZIONE DI ONDE

Se abbiamo due sorgenti S_1 e S_2 che emettono onde che incontrano lo stesso punto materiale P , allora il punto materiale si muove in virtù della somma vettoriale dei singoli spostamenti

dovuti alle sorgenti. Se:

$$S_1 = A \sin(kx - \omega t + \varphi_1) \quad S_2 = A \sin(kx - \omega t + \varphi_2)$$

φ_1 e φ_2 sono le **fasi** delle onde e quantificano uno *sfasamento* rispetto all'onda classica $A \sin(kx - \omega t)$. La somma vettoriale, per formule di Prostaferesi risulta:

$$S_1 + S_2 = 2A \sin\left(\frac{kx - \omega t + \varphi_1 + kx - \omega t + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{kx - \omega t + \varphi_1 - kx + \omega t - \varphi_2}{2}\right)$$

$$S_1 + S_2 = 2A \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (18.23)$$

Questa è un'onda che ha lo stesso numero d'onda e pulsazione delle due onde che l'hanno originata, ma l'ampiezza *dipende* dalle *fasi iniziali*!

- Se $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi \Rightarrow \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = 0$ abbiamo un'**interferenza distruttiva**: le due onde si elidono l'un l'altra.
- Se $\varphi_1 - \varphi_2 = 2n\pi \Rightarrow \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = 1$ abbiamo un'**interferenza costruttiva**: l'ampiezza è massima.

ESEMPIO. Nel caso delle *onde sonore*, con due sorgenti sonore io, in qualità di ricevitore, potrei trovarmi in un punto dove non *si sente nulla* per interferenza distruttiva.

Inoltre, se $\frac{d}{dt}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ (ovvero *non* dipendono dal *tempo*) le onde sono **coerenti**. Riguardo l'energia, si ha che:

$$\mathcal{E} \propto 4A^2 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \quad (18.24)$$

e può essere pari a zero se l'interferenza è distruttiva.

Immaginiamo ora che le onde non abbiano la stessa pulsazione. Allora:

$$S_1 + S_2 = A \sin(kx - \omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(kx - \omega_2 t + \varphi_2)$$

$$S_1 + S_2 = 2A \cos\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \sin\left(kx - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (18.25)$$

Notiamo che l'ampiezza, in questo caso, *dipende* dal tempo periodicamente. Se $\varphi_1 = \varphi_2$ l'energia risulta:

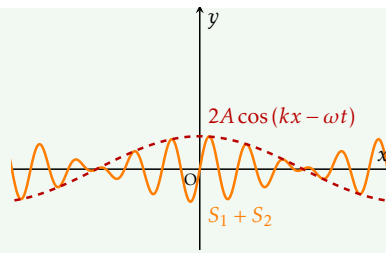
$$\mathcal{E} \propto 4A^2 \cos^2\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \quad (18.26)$$

Anche in questo caso l'energia dipende dal tempo.

DIGRESSIONE. Se $\omega_2 \simeq \omega_1$ (ma *non* uguale!) si verifica il fenomeno dei **battimenti**; l'ampiezza varia con il periodo T' che è proporzionale all'inverso di $\omega_2 - \omega_1$:

$$T' \propto \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \quad (18.27)$$

Se sono molto vicine le due pulsazioni ($\omega_2 \rightarrow \omega_1$), il periodo $T' \rightarrow +\infty$, ovvero si sovrappone al periodo dell'onda stessa.



Inoltre, l'andamento rispetto al tempo dell'ampiezza A' di $S_1 + S_2$ ha il comportamento in figura.

Se tutte le variabili in gioco (k , ω , φ e A) sono diverse:

$$S_1 + S_2 = A_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)$$

Conviene allora andarlo a studiarlo nel caso complesso:

$$S_1 + S_2 = A_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)}$$

Si ha che l'intensità è tale da essere proporzionale al quadrato della somma vettoriale delle onde:

$$I \propto |S_1 + S_2|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1 - k_2 x + \omega_2 t - \varphi_2)$$

Se $k_1 = k_2$ e $\varphi_1 = \varphi_2$, l'intensità è:

$$I \propto A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

18.5 ONDE STAZIONARIE

Se due onde si propagano una *opposta* all'altra, esse possono dare origine al fenomeno delle **onde stazionarie**. Ad esempio, data una *corda* fissata agli estremi, facendola oscillare abbiamo un'onda che si propaga *da destra verso sinistra*, ma l'altro estremo fa propagare nella corda un'onda *da sinistra verso destra*.

$$S = S_1 + S_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) = 2A \cos(\omega t) \sin(kx) \quad (18.28)$$

Quest'onda non ha la forma canonica che conosciamo! Infatti, le onde stazionarie *non si propagano*, formando invece in certi luoghi dello spazio dei *punti fissi* in cui non si ha *oscillazione*, detti **nodi**. Infatti si ha $S = 0$ ogni qualvolta che $kx = n\pi$; poiché per definizione $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ si avranno nodi **N** per:

$$x_N = n \frac{\lambda}{2} \quad (18.29)$$

I **ventri** sono i punti n in cui S è massima (rispetto alla x), ovvero quando $\cos(kx) = 1$, cioè se $kx = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$; facendo i calcoli segue che si avranno ventri **V**:

$$x_V = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (18.30)$$

Queste considerazioni appena fatte sono vere per *ogni* onda stazionaria. Tornando nello specifico al caso della corda fissata agli estremi, anche gli estremi per ovvi motivi risultano essere dei nodi ($x_N = 0$ e $x_N = L$ sono nodi). Ma allora non tutte le lunghezze d'onda sono

disponibili, poiché sennò non soddisferebbe la legge dei nodi. In particolare, per una certa lunghezza fissa L sono possibili le lunghezze d'onda:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (18.31)$$

Con $n + 1$ il numero dei nodi (compresi gli estremi). Per $n = 1$, ovvero $\frac{2L}{1} = 2L$ abbiamo la **frequenza di risonanza o frequenza fondamentale**.

DIGRESSIONE. La *musica* degli strumenti dipende da queste frequenze fondamentali e soprattutto dalle *armoniche superiori*, ovvero le stazionarie con $n > 1$: la fondamentale è percepita dal nostro orecchio come un *suono metallico* come quello del *diapason*, mentre è proprio con la sovrapposizione delle armoniche che otteniamo *sonorità più complesse*.

18.5.1 Densità di energia dell'onda stazionaria

Presa la *densità di energia* $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho A'^2\omega^2$, calcoliamo il valor medio sulla lunghezza di un'onda stazionaria:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\int_0^\lambda \frac{1}{2}\rho A'^2\omega^2 dx}{\int_0^\lambda dx}$$

Poiché $A'^2 = [2A \sin(kx)]^2$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle &= \frac{4}{2}A^2\omega^2\rho \frac{\int_0^\lambda \sin^2(kx) dx}{\lambda} \\ \langle \mathcal{E} \rangle &= \rho A^2\omega^2 \end{aligned} \quad (18.32)$$

Notiamo che è due volte l'energia media di un'onda *non stazionaria*, il che si può ricondurre ad una *sovrapposizione di energia*. Ma allora le onde stazionarie, non spostandosi, *immagazzinano energia!*

DIGRESSIONE. Questa considerazione è fondamentale soprattutto nella *meccanica quantistica*. Trattando gli *elettroni e particelle atomiche* (e anche sub-atomiche) come *onde stazionarie* si spiega perché certe *lunghezze d'onda e certe energie* a loro legate sono *permesse*, mentre altre *no*.

IV

APPENDICI

FORMULARIO

*“Maccio: Ma i bonghi non mi interessano, a me piace la Formula Uno...
Elio: Allora ti insegnerò a suonare la Formula Uno.”*

PARCO SEMPIONE, Elio e le Storie Tese

A.1 INTRODUZIONE

A.1.1 Introduzione alla Fisica

Somma vettoriale:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$$

Componenti di un vettore:

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos \theta \quad a_y = |\mathbf{a}| \sin \theta$$

Modulo di un vettore:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Angolo di un vettore rispetto all'asse x:

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$$

Vettore rispetto ai versori degli assi:

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}$$

Vettore tra due punti A e B:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \hat{\mathbf{i}} + (y_B - y_A) \hat{\mathbf{j}} + (z_B - z_A) \hat{\mathbf{k}}$$

Modulo di un vettore tra due punti A e B:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Prodotto scalare:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

Prodotto scalare in componenti:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Prodotto scalare di un vettore per sè stesso:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a^2$$

Modulo del prodotto vettoriale:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

Prodotto vettoriale in componenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

A.2 MECCANICA CLASSICA

A.2.1 Cinematica

Coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = h \end{cases}$$

Con $0 \leq r \leq \infty$, $-\infty \leq h \leq \infty$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Coordinate sferiche polari:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Con $0 \leq |r| \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Velocità media:

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Velocità istantanea:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Spazio percorso dalla velocità:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Accelerazione media:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Accelerazione istantanea:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Velocità dalla accelerazione:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt$$

Spazio percorso dalla accelerazione:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t a(t) dt$$

Moto rettilineo uniforme:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t \\ v(t) = v_0 \\ a(t) = 0 \end{cases}$$

Moto uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + a_0 \frac{t^2}{2} \\ v(t) = v_0 + a_0 t \\ a(t) = a_0 \end{cases}$$

Velocità e accelerazione in funzione della posizione:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{2a_0} [v^2(t) - v_0^2] \\ v^2(t) &= v_0^2 + 2a_0 [x(t) - x_0] \end{aligned}$$

Accelerazione espresso della velocità:

$$a_0(x(t) - x_0) = \frac{1}{2}v^2(t) - \frac{1}{2}v_0^2$$

Legge oraria della caduta del grave:

$$\begin{cases} y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = -gt \end{cases}$$

Tempo di caduta del grave:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Velocità rispetto all'altezza:

$$v(t) = -gt = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

Legge oraria della caduta del grave (alt.):

$$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = gt \end{cases}$$

Velocità rispetto all'altezza (alt.):

$$v(t) = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

Moto armonico semplice:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Periodo del moto armonico:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frequenza del moto armonico:

$$f = \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Velocità del moto armonico:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Accelerazione del moto armonico:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Equazione differenziale caratterizzante del moto armonico:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

Velocità e accelerazione in funzione della posizione:

$$v^2 = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2)$$

Vettore posizione in coordinate cartesiane:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Vettore posizione in coordinate polari:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = \begin{cases} x = x(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

Vettore spostamento:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Vettore velocità media:

$$\overrightarrow{v_{media}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Vettore velocità istantanea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Vettore velocità istantanea con versore tangenziale:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T$$

Vettore velocità in coordinate cartesiane:

$$\vec{v} = \vec{v}_x \hat{i} + \vec{v}_y \hat{j}$$

Vettore velocità in coordinate polari:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

Vettore velocità in coordinate polari:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

Vettore variazione di velocità:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Vettore accelerazione media:

$$\overrightarrow{a_{media}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Accelerazione istantanea:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{r} \hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Moto parabolico:

$$\underbrace{\begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = v_0 \cos \theta \end{cases}}_{\text{moto rett. uniforme}} \quad \underbrace{\begin{cases} a_y = -g \\ v_y = v_0 \sin \theta - gt \end{cases}}_{\text{moto unifor. accelerato}}$$

Traiettoria del moto parabolico:

$$y(x) = \tan \theta x - \frac{1}{2g} \frac{x^2}{(v_0 \cos \theta)^2}$$

Gittata:

$$\text{gitt} = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$$

Ascissa dell'altezza massima:

$$x_M = \frac{\text{gitt}}{2} = \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta$$

Altezza massima:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Moto circolare:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{cost}$$

con $x = |\vec{r}| \cos \theta$ $y = |\vec{r}| \sin \theta$

Velocità angolare:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Accelerazione del moto circolare uniforme:

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{r} \hat{u}_N = \omega^2 r \hat{u}_N$$

Periodo del moto circolare uniforme:

$$T = \frac{\text{spazio di un giro}}{\text{velocità}} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

A.2.2 Dinamica I: forze

Risultante di una forza:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{ris}$$

Legge di Newton:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Decomposizione di una forza:

$$\begin{cases} \vec{F}_x = m\vec{a}_x \\ \vec{F}_y = m\vec{a}_y \\ \vec{F}_z = m\vec{a}_z \end{cases}$$

Decomposizione della risultante delle forze:

$$\begin{cases} \vec{F}_x = \sum_i \vec{F}_{x,i} \\ \vec{F}_y = \sum_i \vec{F}_{y,i} \\ \vec{F}_z = \sum_i \vec{F}_{z,i} \end{cases}$$

Principio di azione-reazione:

$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A}$$

Quantità di moto:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Velocità angolare del moto circolare uniforme:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Accelerazione angolare:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_T}{r}$$

Velocità angolare in funzione del tempo:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

Angolo spazzato in funzione del tempo:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \alpha \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} - t_0(t - t_0) \right]$$

Quantità di moto e forza:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Principio di conservazione della quantità di moto:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{cost}$$

Teorema dell'impulso della forza:

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F} dt = \int_{p_0}^p d\vec{p} = (\vec{p} - \vec{p}_0) = \Delta\vec{p}$$

Forza peso:

$$\vec{F}_P = m\vec{g}$$

Reazione vincolare:

$$\vec{N} = -\vec{F}_{ris\perp}$$

Ascensore fermo, che sale e che scende:

$$\vec{N} = -m\vec{g} = -\vec{F}_P$$

$$\vec{N} + \vec{F}_P = \vec{F}_{1p} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{F}_P + \vec{F}_{1p} = mg + ma_1 = m(g + a_1)$$

$$\vec{N} + \vec{F}_P = -\vec{F}_{2p} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{F}_P - \vec{F}_{2p} = mg - ma_1 = m(g - a_1)$$

Legge di Hooke:

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta x \hat{i}$$

Pulsazione del moto armonico di una molla:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Accelerazione del moto armonico di una molla: Pendolo in quiete:

$$a(t) = -\frac{k}{m}x(t) = -\frac{k}{m}A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}x + \varphi\right)$$

$$\vec{T} = -\vec{F}_P = -m\vec{g}$$

Forza di attrito:

$$\vec{F}_a = -\mu N \hat{u}_V$$

Forza di attrito viscoso:

$$\vec{F}_v = -b\vec{v}$$

Legge di smorzamento:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

Spostamento di un corpo con attrito viscoso:

$$x = x_0 + \frac{v_0 m}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

Velocità limite di un corpo con attrito viscoso:

$$v = \frac{g}{k} \left(1 - e^{-kt}\right)$$

Forza centripeta:

$$\vec{F}_N = m\vec{a}_N = m \frac{v^2}{r} \hat{u}_N$$

Moto di un corpo libero sul piano inclinato:

$$a_x = g(\sin\theta_2 - \mu_d \cos\theta_2)$$

Massimo attrito statico per impedire il movimento:

$$\mu_s = \tan\theta_1$$

Forze applicate ai capi di una corda e tensione:

$$\vec{T} = \vec{F}$$

Tensione in un sistema di carrucole semplice:

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

Accelerazione in un sistema di carrucole semplice:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Pendolo in movimento:

$$\hat{u}_N : \vec{T} - \vec{F}_{PN} = ma_N \Rightarrow$$

$$\vec{T} - mg \cos\theta \hat{u}_N = ma_N$$

$$\hat{u}_T : \vec{F}_{PT} = ma_T \Rightarrow$$

$$-mg \sin\theta = ma_T \Rightarrow a_T = -g \sin\theta$$

Tensione del pendolo in movimento:

$$\vec{T} = m \left(g \cos\theta + \frac{v^2}{L} \right) \hat{u}_N$$

Momento angolare:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

Momento angolare rispetto ad un polo O' :

$$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \overrightarrow{O'O} \times m\vec{v}$$

Momento di una forza:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Momento di una forza rispetto ad un polo O' :

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F}$$

Momento di più forze:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{F}_{ris}$$

Teorema del momento angolare:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Teorema del momento dell'impulso:

$$\vec{r} \times \vec{J} = \Delta \vec{L}$$

A.2.3 Dinamica II: lavoro ed energia

Lavoro di una forza:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F \cos \theta ds = \int_A^B F_T ds$$

Potenza istantanea:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_T v$$

Potenza media:

$$P_{media} = \frac{W}{\Delta t}$$

Energia cinetica:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Energia cinetica dalla quantità di moto:

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

Teorema dell'energia cinetica:

$$W = \Delta E_K$$

Energia potenziale della forza peso o gravitazionale:

$$E_P = mgh$$

A.2.4 Dinamica III: gravitazione

Velocità areolare:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Periodo di un orbita planetaria:

$$T = \frac{2m}{L} A$$

Lavoro di una forza centrale:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r) \hat{u}_r \cdot d\vec{s}$$

$$W = \int_A^B F(r) dr = F(r_B) - F(r_A)$$

Legge di gravitazione universale:

$$\vec{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2}$$

Campo gravitazionale generato da una massa:

$$G_i = -\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_i$$

Energia potenziale elastica:

$$E_P = \frac{1}{2} k x^2$$

Energia meccanica:

$$E_M = E_P + E_K$$

Principio della conservazione dell'energia meccanica:

$$E_P^I + E_K^I = E_P^F + E_K^F$$

Lavoro della forza d'attrito:

$$W_{F_d, A \rightarrow B} = -\mu_d N \int_A^B d\vec{s}$$

Lavoro totale da A a B:

$$W_{A \rightarrow B} = W_C + W_{NC} = E_{K,B} - E_{K,A}$$

Lavoro delle forze conservative:

$$W_C = -(E_{P,B} - E_{P,A})$$

Lavoro delle forze dissipative:

$$W_{NC} = E_{M,B} - E_{M,A}$$

Campo gravitazionale in un punto:

$$G(P) = \sum_{i=1}^n \left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \hat{u}_i \right)$$

Energia potenziale gravitazionale:

$$E_P = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

Lavoro della forza gravitazionale:

$$W_{AB} = -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) = E_{P,A} - E_{P,B}$$

Forza ed energia gravitazionale:

$$F(r) = \frac{dE_P}{dr}$$

A.2.5 Dinamica IV: sistema di punti

Forza agente sull' i -esimo punto:

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$$

Risultante delle forze interne del sistema:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(I)} = 0$$

Risultante delle forze del sistema:

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{R}}^{(I)} + \vec{\mathbf{R}}^{(E)} = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$$

Centro di massa:

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + \dots + m_n \vec{\mathbf{r}}_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

Centro di massa in componenti:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \quad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Raggio vettore rispetto al sistema di O' :

$$\vec{\mathbf{r}}'_i = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{O}'\mathbf{O}}$$

Centro di massa rispetto al sistema di O' :

$$\vec{\mathbf{r}}'_{CM} = \vec{\mathbf{r}}_{CM} + \vec{\mathbf{O}'\mathbf{O}}$$

Quantità di moto totale e velocità del centro di massa:

$$\vec{\mathbf{P}} = m \vec{\mathbf{v}}_{CM}$$

Risultante delle forze e accelerazione del centro di massa:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(E)} = m \vec{\mathbf{a}}_{CM}$$

Risultante delle forze e quantità di moto totale:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(E)} = \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt}$$

Conservazione della quantità di moto:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(E)} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = 0 \Rightarrow m \vec{\mathbf{v}}_{CM} = \text{cost}$$

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = m_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = \text{costante}$$

A.2.6 Dinamica V: urti

Conservazione della quantità di moto:

$$\vec{\mathbf{P}} = m_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = \text{costante}$$

Momento delle forze interne:

$$\vec{\mathbf{M}}^{(I)} = 0$$

Teorema del momento angolare per un sistema di punti:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{M}}^{(E)} - \vec{\mathbf{v}}_0 \times m \vec{\mathbf{v}}_{CM}$$

Conservazione del momento angolare:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{M}}^{(E)} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} = 0$$

Vettori raggio e velocità fra Oxy e CM :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_{CM} + \vec{\mathbf{r}}'_i \\ \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}_{CM} + \vec{\mathbf{v}}'_i \end{cases}$$

Trasformazioni nel sistema del centro di massa:

$$\begin{cases} O' = CM \\ \vec{\mathbf{r}}'_{CM} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}'_i = 0 \\ \vec{\mathbf{v}}'_{CM} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}'_i = 0 \\ \vec{\mathbf{a}}'_{CM} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}'_i = 0 \\ \vec{\mathbf{P}}' = \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}'_i = 0 \\ \vec{\mathbf{F}}' = \vec{\mathbf{F}} - m \vec{\mathbf{a}}_{OO'} \end{cases}$$

I teorema di König (per il momento angolare):

$$\vec{\mathbf{L}}_0 = \vec{\mathbf{r}}_{CM} \times \vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{L}}' = \vec{\mathbf{L}}_{CM} + \vec{\mathbf{L}}'$$

II teorema di König (per l'energia cinetica):

$$E_{CIN} = E_{CM} + E'_{CIN}$$

Variazione delle quantità di moto dei corpi:

$$\Delta \vec{\mathbf{P}}_1 = -\Delta \vec{\mathbf{P}}_2$$

Energia cinetica negli urti:

$$\Delta E_M = \Delta E_k$$

Quantità di moto dei corpi nel sistema del centro di massa:

$$\vec{\mathbf{P}}_{1,I} = -\vec{\mathbf{P}}_{2,I} \quad \vec{\mathbf{P}}_{1,F} = -\vec{\mathbf{P}}_{2,F}$$

Quantità di moto dei corpi nel sistema del centro di massa:

$$\vec{\mathbf{P}}_{1,I} = -\vec{\mathbf{P}}_{2,I} \quad \vec{\mathbf{P}}_{1,F} = -\vec{\mathbf{P}}_{2,F}$$

Urto completamente anelastico:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{P}}_I = \vec{\mathbf{P}}_F \\ E_{K,I} \neq E_{K,F} \end{cases}$$

Quantità di moto nell'urto completamente anelastico:

$$\vec{\mathbf{P}} = m_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = (m_1 + m_2) \vec{\mathbf{v}}_{CM}$$

Quantità di moto che varia per ogni massa nell'urto completamente anelastico:

$$\Delta \vec{\mathbf{P}}_i = m_i \vec{\mathbf{v}}_{CM} - m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

A.2.7 Dinamica VI: corpo rigido

Risultante delle forze esterne - equazione caratteristica del moto traslatorio:

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} = m \vec{\mathbf{a}}_{CM}$$

Momenti delle forze esterne del corpo rigido:

$$\vec{\mathbf{M}}_O^{(E)} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_O}{dt} = \sum \frac{d}{dt} (\vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i)$$

Energia cinetica di un corpo rigido:

$$\vec{\mathbf{W}}_{A \rightarrow B}^{(E)} = \vec{\mathbf{E}}_{K,B} - E_{K,A}$$

Densità volumica:

$$\rho_V = \frac{dm}{dV}$$

Massa totale di un volume:

$$m = \int dm = \int_V \rho_V dV$$

Variazione di energia cinetica nell'urto completamente anelastico:

$$\begin{aligned} \Delta E_K &= E_{K,F} - E_{K,I} = -E'_{K,I} = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{aligned}$$

Velocità del pendolo balistico:

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

Urto elastico:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{P}}_I = \vec{\mathbf{P}}_F \\ E_{K,I} = E_{K,F} \end{cases}$$

Velocità finali dell'urto elastico:

$$v_{1,F} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,I} + 2m_2 v_{2,I}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2,F} = \frac{2m_1 v_{1,I} + (m_1 - m_2)v_{2,I}}{m_1 + m_2}$$

Velocità finali dell'urto elastico nel centro di massa:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{v}}'_{1,F} = -\vec{\mathbf{v}}'_{1,I} \\ \vec{\mathbf{v}}'_{2,F} = -\vec{\mathbf{v}}'_{2,I} \end{cases}$$

Massa totale con densità volumetrica costante:

$$m = \rho_V V$$

Densità superficiale:

$$\rho_S = \frac{dm}{dS}$$

Massa totale di una superficie:

$$m = \int dm = \int_S \rho_S dS$$

Densità lineare:

$$\rho_l = \frac{dm}{dl}$$

Massa totale di una linea:

$$m = \int dm = \int_l \rho_l dl$$

Centro di massa del corpo continuo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} dm}{m} = \frac{\int_V \vec{r} \rho_V dV}{m}$$

Centro di massa con ρ_V costante:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$$

Forza peso:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int \vec{g} dm = \vec{g} \int dm = m\vec{g}$$

Momento della forza peso:

$$\vec{M} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{g}$$

Energia potenziale del centro di massa:

$$E_P = mgz_{CM}$$

Velocità di un punto in rotazione:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i$$

Equazione caratteristica del moto rotazionale:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Vettore accelerazione angolare:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt}$$

Distanza di un punto dall'asse di rotazione:

$$R_i = r_i \sin \theta_i$$

Momento angolare di un punto rispetto al polo O:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m\vec{v}_i$$

Momento angolare assiale:

$$L_{i,z} = m_i R_i^2 \omega$$

Momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione:

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Proiezione del momento angolare sull'asse di rotazione:

$$L_z = \sum_i (m_i R_i^2) \omega = I_z \omega$$

Componente ortogonale del momento angolare:

$$L_{i,\perp} = L_i \cos \theta_i = m_i r_i R_i \cos \theta_i$$

Equazione del moto del corpo rigido:

$$\vec{M} = I_z \vec{\alpha}$$

Energia cinetica del corpo rigido in moto di rotazione:

$$E_K = \frac{L^2}{2I_z}$$

Teorema dell'energia cinetica in moto di rotazione:

$$W = \Delta E_K = \frac{1}{2} I_z \omega_F^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_I^2$$

Energia potenziale:

$$P = \frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\theta}{dt} = M_z \omega$$

Momento di inerzia nel corpo continuo:

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = \int \rho (x^2 + y^2) dV$$

Teorema di Huyghens-Steiner:

$$I = I_C + ma^2$$

Momenti di inerzia per vari solidi simmetrici:

Corpo	Momento di inerzia
Asta omogenea (centro di massa)	$I_Z = 1/12md^2$
Asta omogenea (estremo)	$I_Z = 1/3md^2$
Anello omogeneo	$I_Z = mR^2$
Guscio cilindrico	$I_Z = mR^2$
Cilindro omogeneo	$I_Z = 3/2mR^2$
Sfera omogenea	$I_Z = 2/5mR^2$

A.3 DINAMICA DELLA MATERIA

A.3.1 Introduzione alla dinamica della materia

Sforzo:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Pressione:

$$P = \frac{F}{A}$$

Deformazione di trazione/compressione:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta l}{l}$$

Deformazione di taglio:

$$\varepsilon_s = \varphi \approx \frac{\Delta x}{l}$$

Sforzo di una trazione/compressione elastica:

$$\sigma_t = Y\varepsilon_t$$

Modulo di compressione:

$$B = -V \frac{dP}{dV}$$

Coefficiente di comprimibilità:

$$K_T = \frac{1}{B} = -\frac{1}{P} \frac{dV}{V}$$

A.3.2 Idrostatica

Legge di Stevino:

$$P(h) = P_a + \rho gh$$

Pressione al variare della densità:

$$P = K\rho$$

Pressione atmosferica al variare dell'altitudine:

$$P = P_a e^{-\frac{\rho}{k}y}$$

A.3.3 Fluidodinamica I: fluidi ideali

Equazione di Bernoulli:

$$P + \rho gy + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

Teorema di Torricelli:

$$v_S = \sqrt{2gh}$$

Portata di massa (e legge di Leonardo):

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta l}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta l}{\Delta t} = \rho S v = \text{costante}$$

Portata volumetrica:

$$Q = S v = \text{costante}$$

Circuitazione dell'ala:

$$\Gamma = 2u\alpha$$

Portanza:

$$L = a\Delta P = a2\rho v\alpha = \rho v\Gamma$$

Teorema di Kutta-Joukowski:

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} ds$$

A.3.4 Fluidodinamica II: fluidi reali

Forza d'attrito viscoso:

$$F_a = \eta S \frac{dv}{dy}$$

Legge di Hagen-Poiseuille:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8 \rho \eta l}$$

Velocità di un fluido laminare:

$$\vec{v}_{FL} = \vec{v}$$

Numero di Reynolds:

$$R = \frac{\rho v l}{\eta}$$

Forza d'attrito viscoso in un fluido laminare:

$$\vec{F}_{att} = -C_1 \eta \vec{v}_{rel} l$$

Legge di Stokes:

$$\vec{F}_{att} = -6\pi\eta\vec{v}_{rel}r$$

Forza d'attrito viscoso in un fluido turbolento:

$$F_{att} = -C_2 \eta \frac{v_{rel}^2}{2} S \rho$$

Velocità di regime di una goccia d'acqua:

$$v_{rel} = \frac{2}{9} r^2 g \frac{\rho_{H_2O} - \rho_{aria}}{\eta}$$

Velocità di sedimentazione:

$$v_{rel} = \frac{2}{9} r^2 g \frac{\rho_{FL} - \rho_{PAR}}{\eta}$$

Velocità di regime di centrifuga:

$$v_{rel} = \frac{V(\rho_{FL} - \rho_{PAR})}{C_1 \eta l} \omega^2 r$$

A.3.5 Termodinamica I: termometria

Coefficiente di tensione:

$$\beta = \left(\frac{\partial \ln(P)}{\partial T} \right)_V$$

Rapporto tra le velocità di regime:

$$\frac{v_{rel}^{cent}}{v_{rel}^{sed}} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

Forza di tensione superficiale di una pellicola di fluido:

$$F = 2\tau l$$

Forza di tensione superficiale di una bolla:

$$F = 4\pi\tau R$$

Condizione di esistenza di una bolla:

$$\rho_{INT} - \rho_{EST} = \frac{4\tau}{R} > 0$$

Forza di tensione superficiale di una goccia:

$$\vec{F} = 2\pi\tau R$$

Condizione di esistenza di una goccia:

$$\rho_{INT} - \rho_{EST} = \frac{2\tau}{R} > 0$$

Formule di Laplace:

$$\Delta\varphi = 2\tau \left(\frac{1}{R_{max}} + \frac{1}{R_{min}} \right) \quad (\text{bolla})$$

$$\Delta\varphi = \tau \left(\frac{1}{R_{max}} + \frac{1}{R_{min}} \right) \quad (\text{goccia})$$

Pressione capillare:

$$P_c = 2\tau_{LV} \frac{\cos\theta}{r}$$

Legge di Borelli-Jurin:

$$h = \frac{2\tau_{LV} \cos\theta}{\rho g r}$$

Coefficiente di comprimibilità:

$$k = - \left(\frac{\partial \ln(V)}{\partial P} \right)_T$$

Coefficiente di dilatazione termica:

$$\gamma = \left(\frac{\partial \ln(V)}{\partial T} \right)_P$$

Lunghezza di una sbarra dopo una dilatazione termica:

$$L = L_0 (1 + \lambda \Delta T)$$

Volume di una sbarra dopo una dilatazione termica:

$$dV = -kV dP + \gamma V dT$$

Lunghezza di una sbarra dopo una dilatazione termica con sforzo:

$$L \simeq L_0 \left(1 + \lambda dT + \frac{1}{Y} \frac{dF}{S} \right)$$

Temperatura in Kelvin da Celsius:

$$T = 273,15 + t$$

Moli di una quantità dalla massa molare:

$$n = \frac{m}{M}$$

A.3.6 Termodinamica II: calorimetria

Calore (latente) in fase di transizione:

$$\Delta Q = mc_L$$

Calore specifico:

$$c = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{m \Delta T} = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}$$

Capacità termica:

$$C = cm = \frac{\delta Q}{dT}$$

Conduzione unidimensionale:

$$\frac{\delta Q}{dt} = -kS \frac{dT}{dx}$$

Flusso di calore:

$$J = \frac{1}{S} \frac{\delta Q}{dt}$$

Legge di Fourier:

$$\frac{\delta Q}{dt} = -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \Delta S$$

Equazione di stato dei gas perfetti:

$$PV = nRT$$

Equazione di Clapeyron:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1}{T} \frac{\Delta Q_{trans. fase}}{\Delta V_{trans. fase}}$$

Equazioni di van der Waals:

$$\left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT$$

$$\left(P_R + \frac{3}{V_R^2} \right) \left(V_R - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} T_R$$

Coefficienti volumetrici:

$$b = \frac{V_C}{3} \quad a = 27b^2 P_C = 3V_C^2 P_C$$

Volume rapportato al numero di moli:

$$v = \frac{V}{n}$$

Legge di trasporto:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{dT}{dt}$$

Coefficiente di diffusione:

$$D = \frac{k}{c_s \rho}$$

Legge di Planck:

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{15}{\pi^4} c^4 \sigma \frac{\lambda^{-5}}{e^{-c\lambda T} - 1}$$

Legge di Stefan-Boltzmann:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dE}{d\lambda} = \sigma T^4$$

Teorema di Kirchoff:

$$\varepsilon(\lambda, T) = \alpha(\lambda, T)$$

A.3.7 Termodinamica III: il primo principio

Lavoro termodinamico:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{F}_p \cdot d\vec{h} = PdV$$

$$\Delta \mathcal{L} = \int_A^B \delta \mathcal{L} = \int_A^B PdV = \int_A^B P(V)dV$$

Primo principio della Termodinamica:

$$\delta Q = \delta \mathcal{L} + dU$$

Primo principio della Termodinamica per gas perfetti:

$$\delta Q = PdV + nc_V dT$$

Entalpia:

$$dH = d(PV + U)$$

Relazione di Mayer:

$$c_p - c_v = R$$

Indice adiabatico:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$$

Calori specifici e gas monoatomici/biatomici:

■ **MONOATOMICI:** $c_V = \frac{3}{2}R, c_P = \frac{5}{2}R.$

■ **BIATOMICI:** $c_V = \frac{5}{2}R, c_P = \frac{7}{2}R.$

Indici adiabatici e gas monoatomici/biatomici:

■ **MONOATOMICI:** $\gamma = \frac{5}{3}.$

■ **BIATOMICI:** $\gamma = \frac{7}{5}.$

Equazione di Poisson:

$$PV^\gamma = \text{cost}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost}$$

Lavoro di una adiabatica:

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{R}{\gamma-1} [T_1 - T_2] = \frac{R}{1-\gamma} \Delta T$$

Condizione di una trasformazione politropica:

$$\delta Q = cdT$$

Indice politropico:

$$\delta = \frac{c_p - c}{c_v - c}$$

Equazione delle trasformazioni politropiche:

$$PV^\delta = \text{cost}$$

Lavoro di una trasformazione politropica:

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{R}{1-\delta} (T_2 - T_1) = \frac{R}{\delta-1} (T_1 - T_2)$$

Lavoro, calore ed energia interna in diverse trasformazioni:

Trasformazione	ΔQ	\mathcal{L}	ΔU
Isocora	$\Delta U = nc_V \Delta T$	0	$\Delta Q = nc_V \Delta T$
Isobara	$dH = nc_P \Delta T$	$P\Delta V$	$nc_V \Delta T$
Isoterma	$\Delta \mathcal{L} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$	$\Delta Q = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$	0
Adiabatica	0	$-\Delta U = -nc_V \Delta T = n \frac{R}{1-\gamma} \Delta T$	$-\Delta \mathcal{L} = nc_V \Delta T = -n \frac{R}{1-\gamma} \Delta T$

A.3.8 Termodinamica IV: il secondo principio

Rendimento:

$$\eta = \frac{\Delta \mathcal{L}_{\text{eseguito}}}{\Delta Q_{\text{ass.}}} = 1 - \frac{|\Delta Q_{\text{ced.}}|}{\Delta Q_{\text{ass.}}}$$

Rendimento della macchina di Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Rendimento del motore a scoppio:

$$\eta = 1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma}$$

Fattore di compressione del motore a scoppio:

$$\varepsilon = \frac{V_A}{V_B}$$

Rendimento del motore diesel:

$$\eta = 1 - \frac{\rho^{\gamma-1} \varepsilon^{1-\gamma}}{\rho - 1} \frac{1}{\gamma}$$

Fattori di compressione del motore Diesel:

$$\varepsilon = \frac{V_A}{V_B} \quad \rho = \frac{V_C}{V_B}$$

Teorema di Carnot:

$$\eta^{ir} \leq \eta^r$$

Teorema di Clausius, cicli reversibili:

$$\oint \frac{\delta Q_r}{T} = 0$$

Teorema di Clausius, cicli irreversibili:

$$\oint \frac{\delta Q_{ir}}{T} < 0$$

Entropia:

$$dS = \frac{\delta Q^r}{T}$$

Differenza di entropia:

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B dS = \int_A^B \frac{\delta Q^r}{T}$$

Entropia, fissato S_0 :

$$S_A = S_0 + \int_0^A \frac{\delta Q^r}{T}$$

A.3.9 Termodinamica V: teoria cinetica dei gas

Teorema del viriale:

$$\langle K \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \rangle_t$$

Energia cinetica totale, pressione e volume:

$$\langle K \rangle_t = \frac{3}{2} PV$$

Valor medio della velocità quadratica:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N}$$

Velocità quadratica, pressione e volume:

$$PV = \frac{1}{3} Nm \langle v^2 \rangle$$

Relazione tra entalpia ed entropia:

$$dH = VdP + TdS$$

Un'espressione dell'entropia:

$$S = S_0 + nc_V \ln TV^{\gamma-1}$$

Un'espressione della variazione dell'entropia:

$$\Delta S = S_B - S_A = nc_V \ln \frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}}$$

Reversibilità di una trasformazione:

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \Delta S \Rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \text{ reversibile}$$

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} < \Delta S \Rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \text{ irreversibile}$$

Variazione dell'entropia dell'universo:

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{ambiente}}$$

Reversibilità e entropia dell'universo:

- Se la trasformazione è **reversibile**:
 $\Delta S_{\text{universo}} = 0$
- Se la trasformazione è **irreversibile**:
 $\Delta S_{\text{universo}} > 0$

Pressione e velocità quadratica:

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \langle v^2 \rangle$$

Energia cinetica di una particella:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

Energia cinetica di una particella e totale:

$$\langle K \rangle = N \langle \varepsilon \rangle$$

Formula di Clausius-Krönig:

$$T = \frac{1}{3} \frac{N_A}{R} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \frac{1}{k_B} m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{1}{k_B} \langle \varepsilon \rangle$$

Energia cinetica di gas monoatomico (tre gradi di libertà):

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Velocità quadratica media e grandezze macroscopiche:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m} = \frac{3RT}{M} = \frac{3PV}{M} = \frac{3P}{\rho}$$

Teorema di Boltzmann:

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}$$

Distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann:

$$f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \mathbf{v} d\mathbf{v}$$

Velocità quadratica media:

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = \left(\frac{3k_B T}{m} \right)^{1/2}$$

Velocità più probabile:

$$v_0 = \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{1/2}$$

Velocità media:

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} v f(v) dv}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0 = \left(\frac{8k_B T}{m} \right)^{1/2}$$

A.3.10 Onde meccaniche

Teorema di Fourier:

$$f(x) = \sum a_n \sin(nx)$$

Onda sinusoidale:

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t)$$

Lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frequenza:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Velocità di propagazione dell'onda:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

Pressione, formula ipsometrica:

$$P(h) = P_0 e^{-\rho g h / P_0}$$

Energia cinetica media con gradi di libertà:

$$\langle \varepsilon_g \rangle = \frac{g}{2} k_B T$$

Energia interna con gradi di libertà:

$$U = \frac{g}{2} k_B N_A T = \frac{g}{2} RT$$

Teorema H di Boltzmann:

$$S = k_B \ln \pi + S_0 = k_B \ln \pi$$

Teorema H di Boltzmann e variazione di entropia:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k_B \ln \frac{\pi_2}{\pi_1}$$

Terzo principio della termodinamica:

$$S_0 = 0$$

Velocità di oscillazione attorno all'equilibrio:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \pm \omega A \cos(kx \pm \omega t)$$

Legge di d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Velocità di propagazione di un'onda in una sbarra:

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}$$

Velocità di propagazione di un'onda in un mezzo:

$$v = \sqrt{\frac{\text{fattore elastico}}{\text{fattore inerziale}}}$$

Energia cinetica di un punto dell'onda:

$$K_P = \frac{1}{2} m v_y^2$$

Energia potenziale di un punto dell'onda:

$$U_P = \frac{1}{2}k'y^2$$

Energia meccanica di un punto dell'onda:

$$E_M = K_P + U_P = \frac{1}{2}k'A^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \text{cost}$$

Velocità massima di un punto dell'onda:

$$v_{max} = -A\omega$$

Energia totale di un punto dell'onda:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = 2A^2m\pi^2\nu^2$$

Densità di energia totale:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

Potenza dell'onda:

$$P = \mathcal{E}Sv = \mathcal{E}S\frac{\lambda}{T} = \mathcal{E}S\frac{\omega}{k}$$

Intensità di un'onda:

$$I = \frac{P}{S} = \mathcal{E}v = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2v$$

Intensità e distanze dalle sorgenti:

$$I_2 = I_1 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2$$

Intensità sonora:

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

Effetto Doppler:

$$v_R = v_S \frac{|\vec{v} - \vec{v}_R|}{|\vec{v} - \vec{v}_S|}$$

Sovrapposizione di onde con fasi diverse:

$$S_1 + S_2 = 2A \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Energia di onde con fasi diverse:

$$\mathcal{E} \propto 4A^2 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

Sovrapposizione di onde con fasi e pulsazioni diverse:

$$S_1 + S_2 = 2A \cos\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cdot \sin\left(kx - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Energia di onde con fasi diverse:

$$\mathcal{E} \propto 4A^2 \cos^2\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$$

Periodo dell'ampiezza dei battimenti:

$$T' \propto \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}$$

Onda stazionaria:

$$S = S_1 + S_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) = 2A \cos(\omega t) \sin(kx)$$

Posizione dei nodi:

$$x_N = n \frac{\lambda}{2}$$

Posizione dei ventri:

$$x_V = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Lunghezze d'onda di un'onda stazionaria con estremi fissi:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Densità dell'onda stazionaria:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \rho A^2 \omega^2$$

COSTANTI

“Giovanni [parlando della scultura]: *Cos’è ’sta roba? Scusate ma... centosettanta milioni per questa cosina qua? Ma dai, è una follia!*

Giacomo: *Ma che follia, che follia!? Ma lo sai che questo qui è un Garpez, uno dei più grandi scultori viventi?*

Giovanni: *Ma scultore che cosa? Ma guarda che il mio falegname con trentamila lire la fa meglio, va’, non ha neanche le unghie!”*

TRE UOMINI E UNA GAMBA, Aldo, Giovanni e Giacomo

B.1 MECCANICA CLASSICA

B.1.1 Cinematica

Accelerazione di gravità sulla terra:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Dimensione: $[g] = [LT^{-2}]$.

B.1.2 Dinamica III: gravitazione

Costante di gravitazione universale:

$$\gamma = 4\pi^2/m_T k_S = 4\pi^2/m_S k_T = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

Dimensione: $[\gamma] = [L^3 M^{-1} T^{-2}]$.

B.2 DINAMICA DELLA MATERIA

B.2.1 Introduzione alla dinamica della materia

Coefficiente di comprimibilità dell’acqua:

$$K_{H_2O} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}$$

Dimensione: $[K_{H_2O}] = [ML^3 T^{-2}]$.

B.2.2 *Fluidodinamica I: fluidi ideali*

Pressione atmosferica al livello del mare: Dimensione: $[P_a] = [ML^{-1}T^{-2}]$.
 $P_a = 1 \text{ atm} = 1013 \text{ mbar} = 750 \text{ mmHg} = 750 \text{ tor} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

B.2.3 *Termodinamica I: termometria*

Coefficiente di dilatazione termica/tensione dei gas perfetti: Dimensione: $[N_A] = [ML^2T^{-2}\theta^{-1}n^{-1}]$.
 Temperatura di fusione dell'acqua a 1 atm:

$$\alpha_P = \alpha_V = \frac{1}{273,15} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$t_0 = 0 \text{ } ^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$$

Dimensione: $[\alpha_P] = [\alpha_V] = [\theta^{-1}]$.
 Volume dei gas perfetti a 0°C:

$$V_0 = 22,4 \text{ L}$$

Dimensione: $[T_0] = [\theta]$.
 Temperatura di ebollizione dell'acqua a 1 atm:

$$t_{100} = 100 \text{ } ^\circ\text{C} = 373,15 \text{ K}$$

Dimensione: $[V_0] = [\alpha_V] = [\theta^{-1}]$.
 Numero di Avogadro:

$$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ particelle/mol}$$

Dimensione: $[T_{100}] = [\theta]$.
 Rapporto per la scala Kelvin:

Dimensione: $[N_A] = [n^{-1}]$.
 Costante dei gas perfetti:

$$\frac{T_{100}}{T_0} = \frac{373,15}{273,15} = 1,366$$

$$R = \frac{P_0 V_0}{273,15} = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Dimensione: $\left[\frac{T_{100}}{T_0}\right] = \text{adimensionale}$.

B.2.4 *Termodinamica II: calorimetria*

Costante di Stefan:

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

Dimensione: $[\sigma] = MT^{-3}\theta^{-4}$.

B.2.5 *Termodinamica III: il primo principio*

Principio di equivalenza di Joule-Mayer:

$$J = \frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta Q} = 4186 \text{ J/Cal}$$

Dimensione: $[J] = \text{adimensionale}$ (nella stessa unità di misura).

B.2.6 *Termodinamica V: teoria cinetica dei gas*

Costante di Boltzmann:

$$k_B = k = \frac{R}{N_A} = 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Dimensione: $[k_B] = ML^2T^{-2}\theta^{-1}$.

B.2.7 *Onde meccaniche*

Velocità del suono:

$$v = 330 \text{ m/s}$$

Dimensione: $[v] = [LT^{-1}]$.

riferimento:

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

(B.1)

Dimensione: $[I_0] = [ML^2T^{-3}]$.

B.2.8 *Altre costanti*

Densità dell'acqua:

$$\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ g/cm}^3$$

Dimensione: $[\rho_{H_2O}] = [ML^{-3}]$.

UNITÀ DI MISURA

*“Trenta centimetri
di dimensione artistica:
Su di ciò la critica è concorde
Nel ritenermi sudicio
Perché non hanno capito
Non parlo perché son rapito
E poi in faccia non son mai inquadrato
Ma dal pubblico son venerato”*

JOHN HOLMES, UNA VITA PER IL CINEMA, *Elio e le Storie Tese*

UNITÀ DI MISURA

Unità fondamentali:

Grandezza	Nome	Simbolo	Dimensione
Massa	chilogrammo	kg	M
Lunghezza	metro	m	L
Tempo	secondo	s	T
Temperatura termodinamica	kelvin	K	θ
Quantità di sostanza	mole	mol	n

Unità derivate:

Grandezza	Nome	Simbolo	Dimensione
Velocità	metro al secondo	m/s	LT^{-1}
Accelerazione	metro al secondo quadro	m/s^2	LT^{-2}
Velocità angolare	radiante al secondo	rad/s	T^{-1}
Frequenza	hertz	Hz o s^{-1}	T^{-1}
Forza	newton	N	MLT^{-2}
Quantità di moto	chilogrammo per metro al secondo	kg · m/s	MLT^{-1}
Energia, lavoro, calore	joule	J	ML^2T^{-2}
Potenza	watt	W	ML^2T^{-3}
Intensità	watt al metro quadro	W/m^2	MT^{-3}
Momento angolare	joule per secondo	J · s	ML^2T^{-1}
Densità volumica	chilogrammo al metro cubo	kg/m^3	ML^{-3}
Densità superficiale	chilogrammo al metro quadro	kg/m^2	ML^{-2}
Densità lineare	chilogrammo al metro	kg/m	ML^{-1}
Sforzo, pressione	pascal	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
Portata di massa	chilogrammo al secondo	kg/s	MT^{-1}
Portata volumetrica	metro cubo al secondo	m^3/s	L^3T^{-1}
Viscosità	pascal per secondo	Pa · s	$ML^{-1}T^{-1}$
Calore specifico	joule per chilogrammo al kelvin	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$
Entropia	joule al kelvin	J/K	$ML^2T^{-2}\theta^{-1}$
Intensità sonora	bel o decibel	B o dB	adimensionale

Unità alternative:

Grandezza	Nome	Simbolo	Equivalenze
Pressione	pascal	Pa	$1,013 \cdot 10^5$ Pa
	millimetri di mercurio	mmHg	750 mmHg = 750 torr
	torr	tor	
	bar	bar	1,013 bar = 1013 mbar
Forza	atmosfera	atm	1 atm
	newton	N	9,81 N
Temperatura	chilogrammo-peso	kg _P	1 kg _P
	kelvin	K	273,15 K
Calore	grado celsius	°C	0°C
	joule	J	4186 J
	grande caloria	Cal	1 Cal
	piccola caloria	cal	10^3 cal

FONTI, AUTORI E RINGRAZIAMENTI

“Siete ancora qui? Il film è finito. Andatene via... 'ndate!”

UNA PAZZA GIORNATA DI VACANZA

FONTI DELLE IMMAGINI

La lista non è completa e verrà aggiornata quando je pare all'autore.

Immagini

- **PAG. 11:** Gilbert Strang (Massachusetts Institute of Technology) & Edwin “Jed” Herman (University of Wisconsin-Stevens Point), *Calculus*, 16 Gennaio 2020.
- **PAG. 139:** autore sconosciuto, *Harper's New Monthly Magazine*, No. 231, August, 1869.

TITOLARI DEL CORSO A

Prof. Marco Costa, Università degli Studi di Torino.

Prof. Antonaldo Diaferio, Università degli Studi di Torino.

ADATTAMENTO L^AT_EX E INTEGRAZIONI DISCUTIBILI

Massimo Bertolotti.

REVISIONI CONTENUTISTICHE

Alessandro Amatelli.

Elisa Antuca.

Guido Buffa.

RINGRAZIAMENTI

All'intero Frittellavenutamalfanclub, con cui condivido questo pazzo mondo universitario:

- Alessandro Amatelli.
- Elisa Antuca.
- Guido Buffa.
- Christian Ciccarello.
- Francesca Colombo.

- Samuele Corsato.
- Francesco Donvito.
- Julian Kerpaci.
- Daniele Sciretti

Alla Pietra Barcellara, per i bei momenti durante i cinque anni liceali in quel di Piacenza:

- Samuele Baffi.
- Chiara Ercini.
- Teodoro Fontana.
- Nicola Govi.
- Francesco Sandalo.
- Marco Santi.
- Edoardo Scabini.

... e ai disegni brutti delle lezioni di fisica, che mi fanno sempre ridere.

INDICE ANALITICO

- accelerazione
 - angolare, 33
 - centripeta, 29
 - decelerazione, 19
 - di gravità, 22
 - gravità, 40
 - istantanea, 19
 - media, 19
 - tangenziale, 29
- ambiente, 161
- ampiezza, 24
- andamento, 5
- asse
 - di rotazione, 86
- assi cartesiani ortogonali, 8
- attrito, 43
 - radente, 43
 - dinamico, 43
 - statico, 43
 - viscoso, 44
- barometro di Torricelli, 101
- battimenti, 185
- bilancia di Cavendish, 66
- bilancia idrostatica, 103
- bolla, 116
- caduta di un grave (*vedi* moto verticale)
- calore, 131
 - latente, 132
 - specifico, 132
- caloria
 - grande, 132
 - piccola, 132
- calorimetro, 132
 - calorimetro di Bunsen, 132
- campo di forza, 63
- capacità termica, 133
- carrucola, 48
- centro, 63
- centro di massa, 70
- ciclo
 - di Carnot, 152
 - Diesel, 154
 - frigorifero, 150
 - motore, 150
 - Otto, 154
- cinematica, 15
- circuitazione dell'ala, 109
- coefficiente
 - di viscosità, 44
 - d'attrito radente, 43
 - dinamico, 43
 - statico, 43
 - di assorbimento, 135
 - di conducibilità, 133
 - di diffusione, 134
 - volumetrica, 127
- coefficienti termometrici, 122
 - coefficiente di comprimibilità, 122
 - coefficiente di dilatazione termica, 122
 - lineare, 122
 - coefficiente di tensione, 122
- componenti, 8
- compressione, 95, 141
- conduttore, 133
- conduzione, 133
- conservazione del momento angolare, 73
- conservazione della quantità di moto, 38
- corda (*vedi* fune)
- corpo rigido, 83
- costante
 - di Boltzmann, 166
 - dei gas perfetti, 125
 - di gravitazione universale, 65

- di Stefan, 135
 - elastica, 42
- curva
 - di evaporazione, 126
 - di liquefazione, 126
 - di solidificazione, 126
 - di sublimazione, 126
- deformazione, 96
- densità, 83
 - di energia, 181
 - totale, 181
 - lineare, 84
 - numerica delle particelle, 165
 - superficiale, 84
 - volumica, 83
- diagramma di Andrews, 126
- diagramma orario, 17
- dinamica, 35
- dinamometro, 36
- distribuzione delle velocità di Maxwell-
Boltzmann, 169
- distribuzione volumetrica, 84
- effetto Doppler, 184
- energia
 - cinetica, 54
 - totale, 70
 - interna, 140
 - potenziale
 - gravitazionale, 67
 - potenziale elastica, 57
 - potenziale gravitazionale, 55
- entalpia, 141
- entropia, 158
- equazione
 - di Bernoulli, 106
 - di Poisson, 146
 - di stato (fluidodinamica), 101
 - di stato (Termodinamica), 122
 - di van der Waals, 127
- equilibrio, 137
 - termico, 127
- errore, 5
 - sistematico, 5
 - statistico, 5
- espansione, 141
- espansione libera, 143
 - di Joule, 143
- evento, 15
- fase, 24, 185
- fattore di compressione
 - del motore a scoppio, 154
 - del motore Diesel, 155
- fenomeni dissipativi, 111
- fisica, 3
 - classica, 3
 - moderna, 3
- fluido, 95
 - ideale, 99
 - reale, 111
- flusso di calore, 134
- fluttuazione, 174
- forma, 84
- formula
 - di Clausius-Krönig, 166
- formule
 - di Laplace, 117
- forza, 35
 - adesione, 118
 - attrattiva, 63
 - centrale, 63
 - centripeta, 46
 - conservativa, 57
 - di Archimede, 102
 - forza
 - di attrito (*vedi* attrito)
 - di richiamo, 41
 - dissipativa, 60
 - esterna, 69
 - impulsiva, 77
 - interna, 69
 - non conservativa, 57
 - peso, 40
 - repulsiva, 63
- frequenza
 - di risonanza, 187
- fronte di flusso, 112
- fronti
 - d'onda, 181
- fune, 47
- gas, 126
 - ideale, 163
- gas perfetto, 123
- gittata, 30
- goccia, 117
- gradi di libertà, 171
- gradiente di temperatura, 134
- grandezza, 4

- scalare, 6
- vettoriale, 6
- I teorema di König, 74
- II teorema di König, 75
- impulso della forza, 39
- indice
 - adiabatico, 145
 - politropico, 147
- inerzia, 36
- infrasuoni, 182
- insieme continuo, 83
- intensità, 181
 - sonora, 182
- interferenza
 - costruttiva, 185
 - distruttiva, 185
- intervallo di tempo, 17
- isolante, 134
- Kelvin, 125
- lavoro, 53
 - lavoro dell'attrito radiente, 57
- legge
 - di Avogadro, 124
 - di Borelli-Jurin, 119
 - di Boyle, 124
 - di Charles, 124
 - di Clausius-Clapeyron, 125
 - di d'Alambert, 179
 - di Dulong-Petit, 172
 - di Fourier, 134
 - di Gay-Lussac, 124
 - di gravitazione universale, 65
 - di Hagen-Poiseulle, 112
 - di Hooke, 42
 - di Keplero, 65
 - di Newton, 36
 - di Planck, 135
 - di smorzamento, 44
 - di Stefan-Boltzmann, 135
 - di Stevino, 100
 - di Stokes, 114
 - di trasporto, 134
 - matematica, 5
 - oraria del moto, 17
- limite
 - di elasticità, 96
 - di frattura, 96
- linee di forza, 67
- liquido
 - saturo, 126
- lunghezza d'onda, 177
- macchina di Carnot, 152
- macchina termica, 150
- massa, 35
 - inerziale, 36
 - totale, 70
- materia, 95
 - stati, 95
- metodo scientifico, 3
- misura, 4
 - diretta, 4
 - indiretta, 4
 - unità di misura, 4
 - unità di misura fondamentali, 4
- modulo di compressione, 97
- mole, 124
- momento, 50
 - di una forza, 51
 - angolare, 50
 - assiale, 87
 - del centro di massa, 74
 - totale, 70
 - dell'impulso, 52
 - di inerzia, 87
- momento d'inerzia
 - anello omogeneo, 90
 - asta omogenea, 89
 - cilindro omogeneo, 91
 - guscio cilindrico, 90
 - sfera omogenea, 91
- moto
 - armonico semplice, 23
 - circolare, 32
 - di precessione, 87
 - parabolico, 30
 - periodico, 23
 - perpetuo, 141
 - rettilineo uniforme, 20
 - stazionario, 105
 - uniformemente accelerato, 20
 - verticale, 22
- motore a scoppio, 154
- motore Diesel, 154
- nodo, 186
- numero
 - di Avogadro, 124

- di Reynolds, 113
- numero d'onda, 177
- oggetto esteso, 83
- onda, 177
 - coerente, 185
 - d'Alambert, 179
 - sinusoidale, 177
 - sonora, 178
 - stazionaria, 186
- opaco, 135
- osservabile, 4
- parete, 127
 - adiabatica, 127
 - diatermica, 127
- pendolo, 49
 - balistico, 80
- perdita di carico, 111
- periodo, 24, 178
- peso
 - apparente, 41
 - chilogrammo peso, 103
 - molecolare, 124
- piano, 63
- piano di Clapeyron, 124
- polo, 50
- portanza, 109
- portata
 - di massa, 108
 - volumetrica, 108
- potenza, 54
 - dell'onda, 181
 - istantanea, 54
 - media, 54
- pressione, 96
 - atmosferica, 100
 - in forma ipsometrica, 102, 170
 - isotropa, 99
- principi della dinamica
 - primo, 36
 - secondo, 36
 - terzo, 37
- principi della Termodinamica
 - postulato zero, 127
 - primo, 140
 - quarto, 176
 - secondo, 149
- principio
 - del bilancio detagliato, 167
 - dell'entropia, 161
 - della conservazione dell'energia meccanica, 58
 - di Archimede, 102
 - di equivalenza di Joule-Mayer, 139
 - di isotropia di Pascal, 99
- prodotto
 - scalare, 10
 - vettoriale, 11
- pulsazione, 24, 178
- punto
 - critico, 125
 - materiale, 15
 - triplo, 126
- quantità (*vedi grandezza*)
- quantità di moto, 38
 - totale, 70
- raggio vettore (*vedi vettore spostamento*)
- rarefatto, 123
- reazione vincolare, 40
- regime
 - laminare, 112
 - turbolento, 113
- regione di plasticità, 96
- relazione
 - di Mayer, 145
 - di Tate, 117
- rendimento, 152
- rotazione, 86
- rototraslazione, 85
- scala
 - assoluta, 123, 125
 - centigrada, 123
 - Fahrenheit, 123
- serbatoio (*vedi sorgente*)
- sforzo, 95
- simmetrie, 84
- sistema
 - aperto, 137
 - chiuso, 137
 - di punti, 69
 - inerziale, 36
 - isolato, 39
 - termodinamico, 121
- soglia del dolore, 182
- sorgente, 149
- spazio delle fasi, 169
- stato del sistema, 122

- macroscopico, 122
- superfluido, 126
- taglio, 96
- temperatura
 - di Debye, 172
- tensione, 47
 - superficiale, 116
- teorema
 - del viriale, 164
 - del momento angolare, 52
 - per un sistema di punti, 73
 - del momento dell'impulso, 52
 - dell'energia cinetica, 54
 - di Boltzmann, 167
 - di Carnot, 155
 - di Clausius, 157
 - di Fourier, 177
 - di Kirchoff, 135
 - di Kutta-Joukowski, 109
 - H di Boltzmann, 174
- teoria cinetica dei gas, 163, 177
- termodinamica, 121
 - termologia, 121
 - calorimetria, 121
 - termometria, 121
- timpano, 182
- torchio idraulico, 100
- traiettoria, 17
- trasformazione, 121, 137
 - adiabatica, 142
 - irreversibile, 137
 - isobara, 124
 - isocora, 124
 - isoentropica, 159
 - isoterma, 124
 - politropica, 147
 - quasistatica, 138
 - reversibile, 138
- traslazione, 86
- trazione, 95
- tubo di Pitot, 107
- ultrasuoni, 182
- universo, 161
- urto, 77
 - anelastico, 80
 - completamente anelastico, 79
 - elastico, 80
 - perfettamente elastico, 39
- vapore, 126
 - saturo, 126
- variabile
 - estensiva, 131
 - intensiva, 131
 - termodinamica, 122
- variazione di posizione, 17
- velocità
 - angolare, 32
 - areolare, 64
 - centrifuga, 115
 - di fuga, 68
 - di propagazione dell'onda, 178
 - istantanea, 18
 - limite, 45
 - media, 18
 - media (gas ideale), 170
 - più probabile, 170
 - prima velocità cosmica, 32
 - quadratica media, 170
 - radiale, 28
 - sedimentazione, 115
 - tangenziale, 28
- ventre, 186
- versore, 9
 - normale, 29
 - tangenziale, 27
- vettore, 7
 - accelerazione angolare, 86
 - accelerazione media, 28
 - posizione, 26
 - spostamento, 26
 - variazione di velocità, 28
 - velocità angolare, 86
 - velocità istantanea, 26
 - velocità media, 26
- vincolo, 40
- viscosimetro di Ostwald, 112
- viscosità, 111
 - viscosità (unità), 112
- vortici, 113
- zero assoluto, 153

